UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

3. Espaços Vetoriais com Produto Interno

LOB 1037 – Álgebra Linear

Profa. Paula C P M Pardal

1. Produto Interno

- Soma vetorial e multiplicação de um vetor por um escalar ➔ conceitos estendidos a espaços vetoriais *abstratos* ($\mathbb{R}^n$, matrizes, polinômios, funções contínuas, entre outros).

- Os conceitos de produto interno, norma, ortogonalidade e projeção também podem ser estudados no contexto desses espaços vetoriais.

DEFINIÇÃO:

Seja V um espaço vetorial real. Um **produto interno** em V é uma função, que a cada par ordenado de vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ associa um escalar, denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

1) Simetria: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$.

2) Positividade: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0, \forall\, \vec{u} \in V$ ➔ $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

3) Distributividade: $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle, \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.

4) Homogeneidade: $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Utilizando as propriedades (1), (3) e (4), tem-se:

- $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle, \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.
- $\langle \vec{u}, \alpha\vec{v} \rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, o produto interno em um EV real é uma transformação linear nas duas variáveis ou transformação bilinear.

Um espaço vetorial V real em que se define um produto interno, denotado por $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$, é também conhecido como Espaço Vetorial Euclidiano.

1) Seja $B = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$: todo vetor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser associado a uma matriz coluna $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in M(n,1)$, pois os EVs são isomorfos.

➔ Produto interno usual do $\mathbb{R}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, também denominado produto interno Euclidiano (ou produto escalar), pode ser escrito como:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = V^T U = V^T I U, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

em que $I \in M(n,n)$ é a matriz identidade.

2) Considere o EV real $\mathcal{C}([a,b])$ das funções contínuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. O produto interno usual é definido da seguinte forma:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \forall f,g \in \mathcal{C}([a,b])$$

3) No EV real $M(n,n)$ das matrizes quadradas de ordem n, o produto interno usual é definido da seguinte forma:

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A), \forall\, A,B \in M(n,n)$$

4) Dada uma matriz $A \in M(n,n)$, o OL T_A está associado à matriz A e é definido como: $\vec{y} = T_A(\vec{x}), \forall\, \vec{x} \in V$ (ou, na forma matricial: $Y = AX$).

➔ Considere $V = \mathbb{R}^n$ com produto interno usual. Se A é uma matriz simétrica, então:

$$\langle T_A(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \langle \vec{x},T_A(\vec{y})\rangle, \forall\, \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

2. Norma

DEFINIÇÃO:

Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Uma **norma** em V é uma função $\|\cdot\|$ que, a todo elemento $\vec{v} \in V$ associa um número real $\|\vec{v}\|$, não-negativo, definido como:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Observações:

1) Se $\|\vec{v}\| = 1$, o vetor $\vec{v}$ é dito unitário ➔ nesse caso, $\vec{v}$ está normalizado.

2) Todo vetor $\vec{v}$, não-nulo, pode ser normalizado ➔ $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

3) Se $\vec{v} = (x, y, z) \in V(= \mathbb{R}^3)$ ➔ produto interno usual ➔ $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

EXEMPLO

Considere $V = \mathbb{R}^3$ um EV com o produto interno:

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2,$$

tal que $\overrightarrow{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$. Dado $\vec{w} = (-2,1,2) \in \mathbb{R}^3$, calcule a norma de $\vec{w}$ e o normalize (caso necessário), segundo:

a) O produto interno acima definido;

b) O produto interno usual;

c) A quais conclusões levam os resultados obtidos?

Seja V um EV real com produto interno. Para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$, tem-se:

I. Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$.

II. Desigualdade Triangular: $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

III. Continuidade da Norma: $\big| ||\vec{u}|| - ||\vec{v}|| \big| \leq ||\vec{u}|| - ||\vec{v}||$.

IV. Identidades Polares: $||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

EXERCÍCIOS

1. Em cada um dos casos abaixo, mostre que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ define um produto interno no espaço vetorial V dado:

   a) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$, com $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in V = \mathbb{R}^2$.

   b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2}$, com $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in V = \mathbb{R}^2$ e $a, b \in \mathbb{R}$ e não nulos.

   c) $\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$, com $f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ e $g(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \in V = P_n(t)$.

2. Seja o EV real $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = (6, a, -1)$ e $\|\vec{u}\| = \sqrt{41}$.

   $a = \pm 2$

3. Considere o EV real $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, tem-se $\|k\vec{v}\| = 5$, dado $\vec{v} = (-2,3,0,6)$?

   $k = \pm \frac{5}{7}$

4. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de um espaço vetorial euclidiano tais que $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{u}\| = 1$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$. Determine $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

   $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -1$

DEFINIÇÃO:

Seja V um espaço vetorial real com produto interno.

1) Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tal que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois **vetores ortogonais**: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2) Se $B \subset V$ é um subconjunto não vazio de V tal que, para todo par $\overrightarrow{v_i}$ e $\overrightarrow{v_j}$, $i \neq j$, de B tem-se $\langle \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} \rangle = 0$, então B é um **conjunto ortogonal de vetores**.

Teorema (1):

Se $B = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não-nulos, então B é LI.

EXEMPLOS

1) Considere o EV $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

   O conjunto $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,-1,2)\} \in \mathbb{R}^3$ é ortogonal.

2) Considere o EV $V = \mathcal{C}([a, b])$ das funções contínuas em $\mathbb{R}$ no intervalo $[a, b]$, com o produto interno usual.

   a) $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ são funções ortogonais em relação ao produto interno usual de $\mathcal{C}([-1,1])$.

   b) $B_1 = \{\text{sen}(x), \text{sen}(2x), \dots, \text{sen}(nx), \dots\}$ e $B_2 = \{1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), \dots\}$ são conjuntos ortogonais em relação ao produto interno usual de $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$.

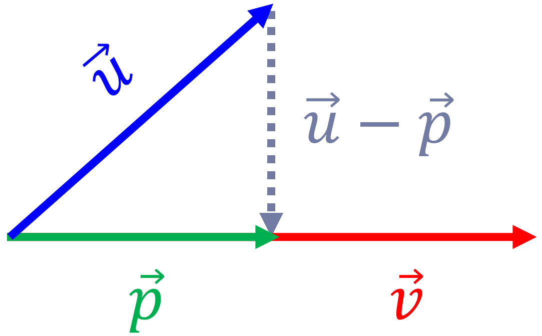
4. Projeção Ortogonal

Teorema (2):

Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Dado $\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$, então a **projeção ortogonal** de qualquer $\vec{u}$ em $\vec{v}$ existe e é um único vetor $\vec{p}$ tal que:

1) $\vec{p} \parallel \vec{v}$

2) $(\vec{u} - \vec{p}) \perp \vec{v}$



Então:

$$\vec{p} = \text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\right) \vec{v}$$

Teorema (3):

Se $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ é uma **base ortogonal** de V e $\vec{w} \in V$, então:

$$\vec{w} = \left(\mathrm{proj}_{\overrightarrow{v_1}}\vec{w}\right) + \left(\mathrm{proj}_{\overrightarrow{v_2}}\vec{w}\right) + \cdots + \left(\mathrm{proj}_{\overrightarrow{v_n}}\vec{w}\right)$$

Observação:

Se $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ for uma **base ortonormal** $\begin{cases} \langle\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}\rangle = 0, \text{se } i \neq j \\ \\ \langle\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j}\rangle = 1, \text{se } i = j \end{cases}$, então:

$$\vec{w} = (\langle\vec{w}, \overrightarrow{v_1}\rangle)\overrightarrow{v_1} + (\langle\vec{w}, \overrightarrow{v_2}\rangle)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\langle\vec{w}, \overrightarrow{v_n}\rangle)\overrightarrow{v_n}$$

EXERCÍCIOS

1. Considere o EV V com produto interno. Calcule o ângulo entre os elementos de V:

   a) $V = \mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (1,1,1,0)$; $\vec{v} = (2,1,-2,1)$. Produto interno usual. $\theta = \arccos(\frac{\sqrt{30}}{30})$

   b) $V = P_2(x)$: $p = -1 + 5x + 2x^2; q = 2 + 4x - 4x^2$. $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. $\theta = \arccos(\frac{\sqrt{30}}{18})$

   c) $V = M(2,2)$: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Produto interno usual. $\theta = \arccos(\frac{\sqrt{870}}{174})$

2. Verifique se os vetores a seguir são ortogonais em relação ao produto interno definido para o EV V:

   a) $V = \mathbb{R}^4$: $\vec{u} = (-4,6,-10,1)$; $\vec{v} = (2,1,-2,9)$. Produto interno usual. Não.

   b) $V = P_2(x)$: $p = 1 - x + 2x^2; q = 2x + x^2$. $\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. Sim.

   c) $V = M(2,2)$: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Produto interno usual. Sim.

3. Em um EV euclidiano $V = \mathbb{R}^3$ em que $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (d, e, f)$, o produto interno é definido como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = af + be + cd$. $B = \{(1,1,1), (\alpha, 0, -1), (1, \beta, 1)\}$ é uma base desse espaço. Quais os valores de α e β para que B seja uma base seja ortogonal?

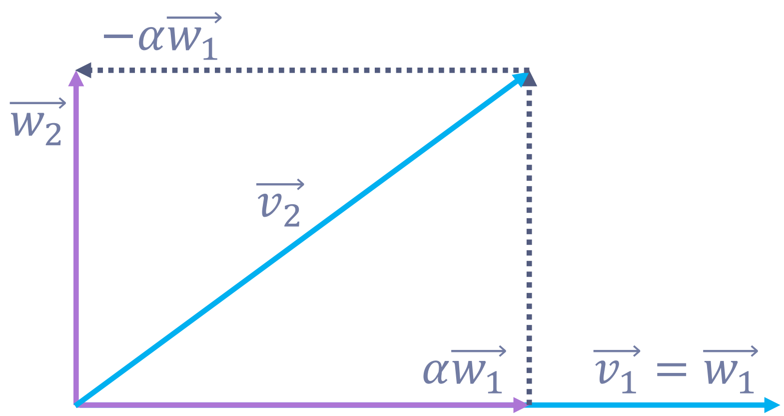
$\alpha = 1; \beta = -2$

4. Calcule a distância entre o ponto $P(0,2,3)$ e a reta r que passa pela origem e tem a direção do vetor $\vec{v} = (1,2,1)$.

$\delta(P, r) = \frac{\sqrt{174}}{6}$

5. Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Aqui, será mostrado que a partir de uma base qualquer de um EV com produto interno, é possível encontrar uma base ortonormal, desde que o primeiro vetor da nova base seja combinação linear do primeiro vetor da base antiga.
- Inicialmente, esse processo será descrito para uma base $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} \subset \mathbb{R}^2$ e, posteriormente, será generalizado.
  - Seja $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1}$.
  - A partir de $\overrightarrow{v_2}$, encontrar um novo vetor $\overrightarrow{w_2}$, ortogonal a $\overrightarrow{w_1}$ ➔ $\langle \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_1} \rangle = 0$.



- Para tanto:

  - Seja $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - \alpha\overrightarrow{w_1}$, tal que $\alpha \in \mathbb{R}$ é escolhido de acordo com o vínculo: $\langle\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_1}\rangle = 0$, ou seja, $\langle(\overrightarrow{v_2} - \alpha\overrightarrow{w_1}), \overrightarrow{w_1}\rangle = 0$. Isso significa que $\alpha = \frac{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_1}\rangle}{\langle\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_1}\rangle}$.

- Tem-se então:

  - $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1}$.

  - $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{v_2} - \left(\frac{\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{w_1}\rangle}{\langle\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_1}\rangle}\right)\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_2} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{w_1}}\overrightarrow{v_2}$

- Os vetores $\overrightarrow{w_1}$ e $\overrightarrow{w_2}$ são não nulos (formam uma base) e podem ser normalizados ➔ $\vec{u}_i = \frac{\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|}$, $i = 1{,}2$ ➔ obtendo-se uma base ortonormal $B' = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\} \subset \mathbb{R}^2$.
- O processo de ortogonalização de uma base de dois vetores pode ser generalizado para uma base $B = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$:
  - $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1}$
  - $\vec{w}_2 = \overrightarrow{v_2} - \text{proj}_{\vec{w}_1} \overrightarrow{v_2}$
  - $\vec{w}_3 = \overrightarrow{v_3} - \text{proj}_{\vec{w}_1} \overrightarrow{v_3} - \text{proj}_{\vec{w}_2} \overrightarrow{v_3}$
  - Logo: $\vec{w}_n = \overrightarrow{v_n} - \text{proj}_{\vec{w}_1} \overrightarrow{v_n} - \text{proj}_{\vec{w}_2} \overrightarrow{v_n} - \cdots - \text{proj}_{\vec{w}_{n-1}} \overrightarrow{v_n}$
  - Normalizando: $\vec{u}_i = \frac{\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|}, i = 1, \dots, n$ ➔ $B' = \{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$

EXEMPLO

Considere o espaço vetorial real $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno e $B = \{(1,2,1), (0,3,0), (1,0,-1)\}$ uma base ordenada de V. A partir de B, obtenha uma base ordenada ortonormal B' para $\mathbb{R}^3$, com relação ao produto interno usual.