Resposta em frequência

* Base para o entendimento de fatores que determinam a estabilidade (ou instabilidade) de um sistema elétrico, ou, por exemplo, em sistemas de comunicação na separação de frequências.

* A resposta em frequência de uma rede pode ser escolhida para rejeitar alguns componentes da função de excitação (forçante), ou enfatizar (amplificar) outros:
  → tal comportamento é uma característica de circuitos sintonizados ou ressonantes.

Ressonância

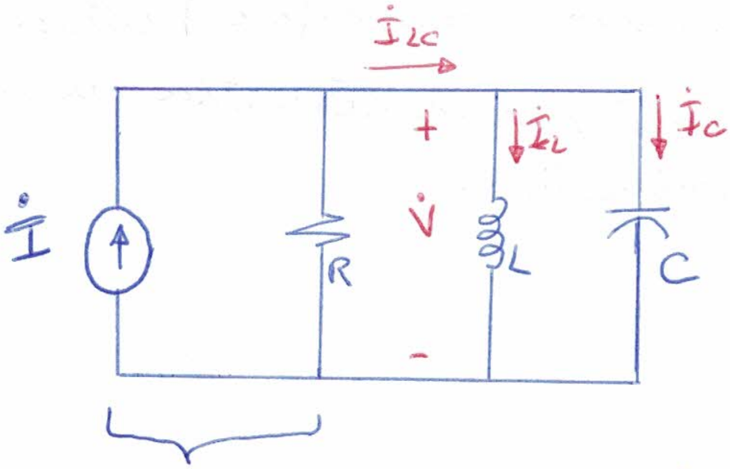
* Ideia básica: condição existente em qualquer sistema físico quando uma função forçante senoidal com amplitude fixa produz uma resposta com amplitude máxima.

* Em uma rede elétrica com dois terminais contendo pelo menos um indutor e um capacitor, definimos ressonância como a condição que existe quando a impedância de entrada da rede é puramente resistiva.

Logo: uma rede está em ressonância (ou é ressonante) quando a tensão e a corrente em seus terminais de entrada estão em fase.

* Também veremos que uma resposta com amplitude máxima é produzida na rede quando ela está na condição de ressonância.

Exemplo: análise de um circuito RLC paralelo.



Pode ser uma fonte prática de corrente com impedância de saída muito elevada!

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(wC - \frac{1}{wL}\right)$$

* Na condição de ressonância:

$$wC - \frac{1}{wL} = 0$$

$\therefore$ admitância puramente real!

* A condição de ressonância pode ser alcançada com o ajuste de L, C ou w!

* Sendo w variável:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s} \quad \text{ou}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

* ω_0 é idêntica à frequência de ressonância definida anteriormente!

* A configuração de pólos e zeros da função admitância também pode ser analisada:

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

$$Y(s) = \frac{C\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)}{s}$$

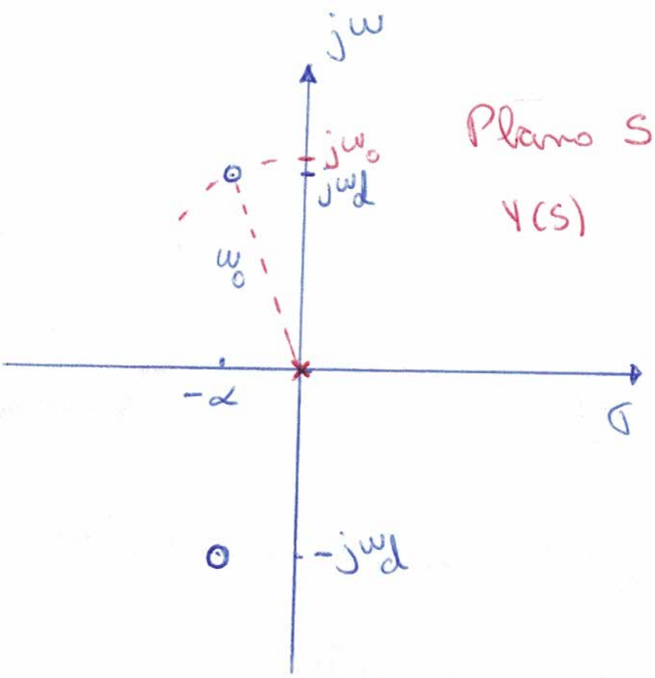
* Explicitando os zeros de Y(s) pela fatoração do numerador:

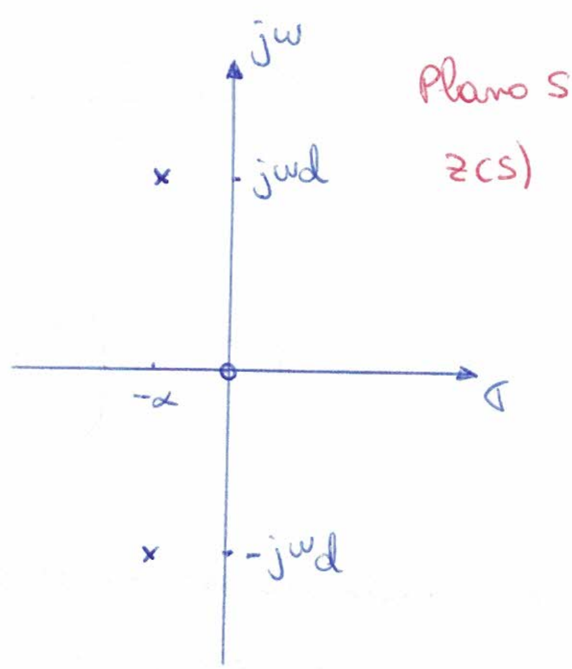
$$Y(S) = \frac{c\,(S+\alpha-j\omega_d)(S+\alpha+j\omega_d)}{S}$$

Onde α e ω_d representam as mesmas grandezas de quando discutimos a resposta natural SUBAMORTECIDA do circuito RLC paralelo. $(\alpha < \omega_0)$

$\alpha = \dfrac{1}{2RC} \Rightarrow$ coeficiente de amortecimento exponencial ou frequência Neperiana (Np/s)

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \Rightarrow$ frequência de ressonância natural (rad/s)





* Em vista da relação entre α, ω_d e ω_0 fica claro que a distância da origem do plano S até um dos zeros da admitância é numericamente igual a ω_0.

* Dada a configuração de pólos e zeros, a frequência ressonante pode ser obtida por métodos puramente gráficos. Simplesmente traçamos um arco passando por um dos zeros, usando a origem do plano S como centro. A interseção desse arco com o eixo $j\omega$ positivo localiza o ponto $S = \omega_0$.

* Está claro que ω_0 é ligeiramente maior do que a frequência de ressonância natural ω_d, mas a razão entre ambas se aproxima da unidade à medida que a relação entre ω_d e α aumenta.

Ressonância e a resposta de tensão

Vamos examinar o módulo da $\dot{V}(S)$ indicada no circuito RLC paralelo, à medida que a frequência ω da função de excitação é variada, a partir de

$H(S) = Z(S)$.

$$\overset{H(S)}{\dot{V}(S) = Z(S) \cdot \dot{I}(S)}$$

↳ excitação: $\dot{I}(S)$

↳ resposta: $\dot{V}(S)$

$$\boxed{H(S) = Z(S)}$$

$$Z(S) = \frac{1}{Y(S)} = \frac{S}{C\left(S^2 + \frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{\frac{1}{C}\,S}{S^2 + \frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

* gráfico do $|Z(S)|$ versus ω
* Para $S = j\omega$

$$Z(j\omega) = \frac{\frac{1}{C}\,j\omega}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{C}\,j\omega}{\frac{-LRC\omega^2 + j\omega L + R}{RLC}}$$

$$Z(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{C} \cdot RLC}{-LRC\omega^2 + j\omega L + R} = \frac{j\omega RL}{-LRC\omega^2 + j\omega L + R} \quad \begin{matrix} \div j\omega RL \\ \div j\omega RL \end{matrix}$$

$$\boxed{Z(j\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}}$$

Resposta em amplitude:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

* Visto que R, L e C são constantes, a amplitude máxima ocorre quando o denominador do módulo é um mínimo.

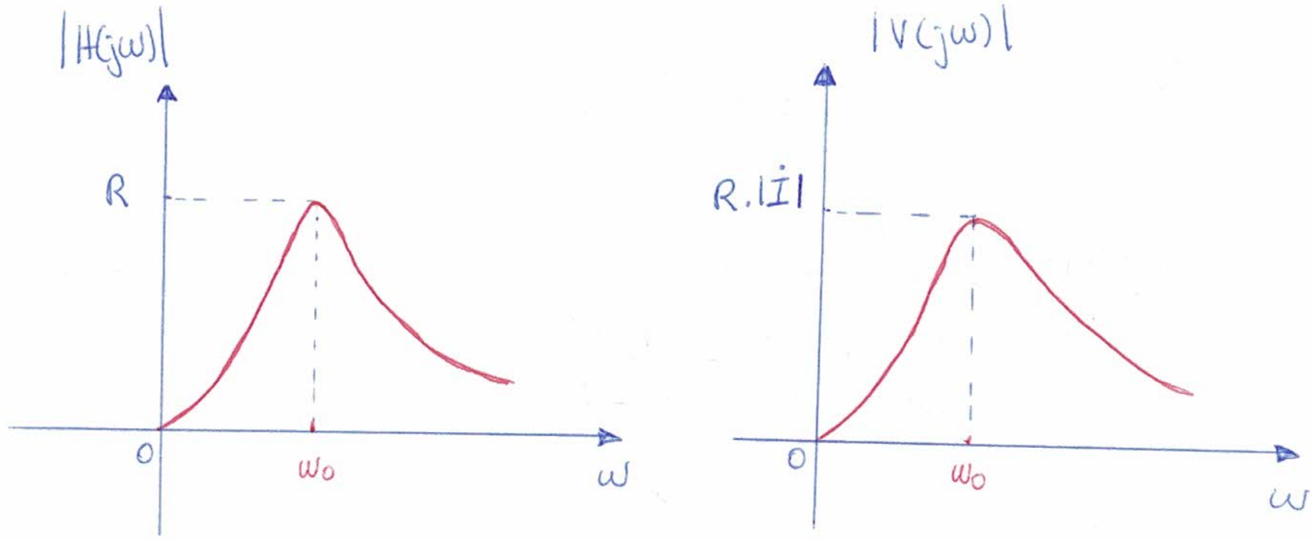
$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

Onde a frequência em tal situação $\omega = \omega_0$ é:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$|H(j\omega)|_{máx} = |H(j\omega_0)| = R$$

$$|H(j\omega)| \rightarrow 0 \text{ quando } \omega \rightarrow \infty$$



Resposta em fase

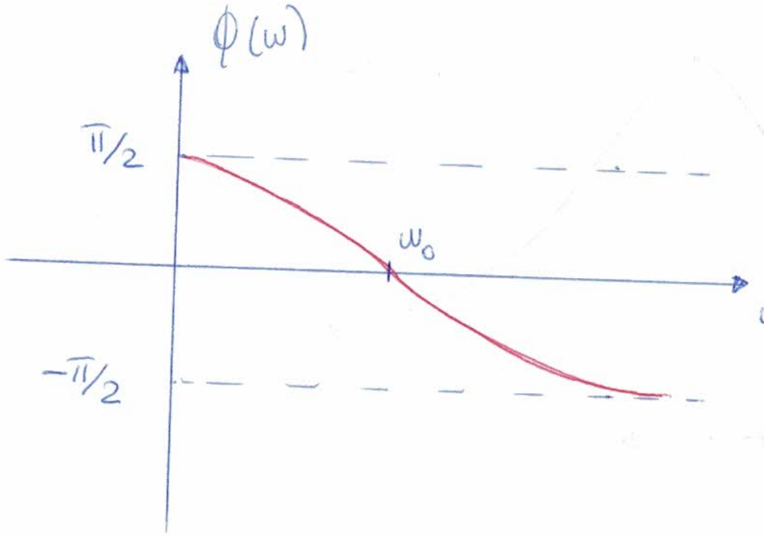
$$\phi(\omega) = - \tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\boxed{\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{Im}{Real}}$$

$\phi(\omega_0) = 0$

$\phi(\omega) \to \frac{\pi}{2}$ quando $\omega \to 0$

$\phi(\omega) \to -\frac{\pi}{2}$ quando $\omega \to \infty$



* Se a entrada é $i_1(t) = I_m \cos \omega t$ (A) $\therefore$ $\dot{I}_1 = I_m \angle 0°$ (A)

* $\dot{V}_2 = Z \cdot \dot{I} = |Z| \cdot |I| \angle \theta_Z° + 0°$ (V)

* Podemos obter tanta informação da resposta da função de rede como da resposta da saída.

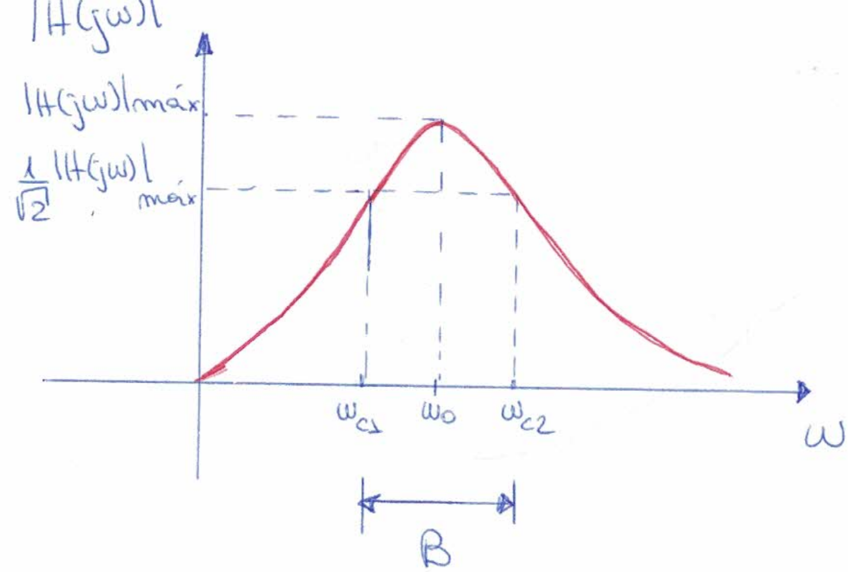
* Função de rede depende apenas da rede e não da excitação.

Filtros

1) Filtro passa-faixa

Deixa passar a faixa de frequências centradas em torno de ω_0.

$\therefore$ próximas!



$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ rad/s $\rightarrow$ freq. de ressonância ∴ freq. central

ω_{c1} e ω_{c2} $\rightarrow$ freq. de corte onde a amplitude é $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ vezes a amplitude máxima

* faixa de passagem: $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$

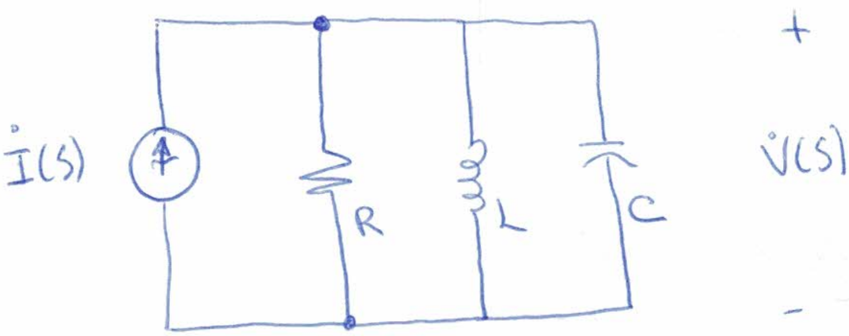
* largura/extensão da faixa de passagem:

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$ (ou banda passante)

Exercícios: 15.1.1 / 1.2 e 1.3

15.3.2 e 15.3.3

Filtro passa-faixa



$$H(S) = \frac{\frac{1}{C}\, S}{S^2 + \frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

$$H(S) = \frac{K\ S}{S^2 + aS + b} \quad \text{(I)}$$

→ função passa-faixa geral de 2ª ordem, onde K e a são maiores que zero e constantes reais.

$$|H(j\omega)| = \frac{|K\omega|}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} = \frac{|K|}{\sqrt{a^2 + [(b-\omega^2)/\omega]^2}}$$

Logo: $|H(j\omega)|_{máx} = \frac{|K|}{a}$ ∴ qdo $\boxed{\omega_0^2 = b}$ (II)

ω_0 => freq. de ressonância ou freq. central

* Freq. de corte (w_c):

$$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(jw)|_{máx}$$

$$\frac{|k|}{\sqrt{a^2 + [(b - w_c^2)/w_c]^2}} = \frac{|k|}{a\sqrt{2}}$$

$$\frac{b - w_c^2}{w_c} = \pm a$$

$$w_c^2 \pm a w_c - b = 0 \quad \text{(III)}$$

que devido ao duplo sinal tem quatro soluções!

* Considerando o sinal positivo:

$$w_{c1} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{(IV)}$$

* Considerando o sinal negativo:

$$w_{c2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{(V)}$$

Descartamos o sinal negativo no radical porque dá uma freq. de corte negativa! Desconsiderando a raiz negativa!

Temos então a largura de faixa:

$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} \quad \therefore \quad \boxed{B = a} \qquad (VI)$$

Como $\omega_0^2 = b$ e $B = a$ podemos escrever a função de rede (passa-faixa) como:

$$\boxed{H(S) = \frac{K\,S}{S^2 + BS + \omega_0^2}} \qquad (VII)$$

A equação (VII) representa a função de rede geral de um filtro passa-faixa de 2º ordem, tendo freq. central ω_0 e largura de faixa B.

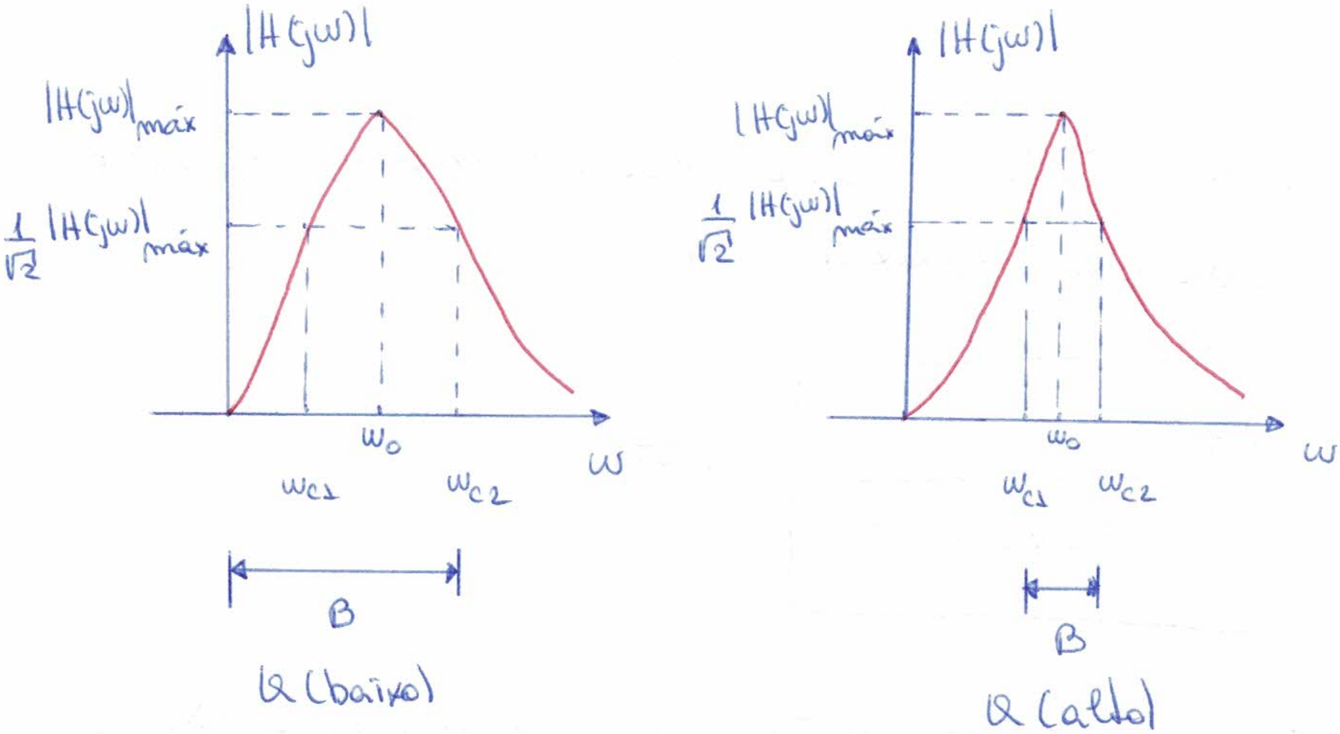
Índice de mérito ou Fator de qualidade

Nos dá a avaliação da seletividade ou exatidão do pico num circuito ressonante.

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{B}} \qquad (VIII)$$

* Q baixo → B relativamente grande

* Q alto → " pequeno ou um circuito mais seletivo.



$$H(S) = \frac{K\,S}{S^2 + \left(\frac{w_0}{Q}\right)S + w_0^{\,2}} \qquad (IX)$$

$$H(S) = f\left(w_0, Q, B\right)$$

Exercício: Mostre que $H(S) = \dfrac{2S}{S^2 + 0{,}2S + 1}$ é a função de rede de um filtro passa-faixa e calcule ω_0, ω_{c1}, ω_{c2}, B e Q.

Resp.: 1; $\left(\dfrac{\mp 0{,}2 + \sqrt{4{,}04}}{2}\right) = 0{,}905$; $1{,}105$; $0{,}2$; 5

Obs.: Q também é definida por alguns autores como SELETIVIDADE

incluída para simplificar as expressões

$$Q = 2\pi \, \frac{\text{máxima energia armazenada}}{\text{energia total perdida por período}}$$

* folha complementar!

O efeito de Q na ressonância

$Q = \dfrac{\omega_0}{B}$ $\quad a = B \quad$ e $\quad b = \omega_0^2$

$$\omega_{c1} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\omega_{c2} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\omega_{c1,c2} = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2}$$

ou

$$\omega_{c1,c2} = \left(\mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)\omega_0 \qquad (X)$$

* Se Q for elevado, podemos desprezar $\left(\frac{1}{2Q}\right)^2$ em comparação com 1:

$$\omega_{c1,c2} = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0$$

* Ou, aproximadamente:

$$\boxed{\omega_{c1} = \omega_0 - \frac{B}{2}} \qquad (XI)$$

$$\boxed{\omega_{c2} = \omega_0 + \frac{B}{2}}$$

Exemplo: Dado $H(S) = \dfrac{2S}{S^2 + 0{,}2S + 1}$, calcule ω_0, ω_{c1}, ω_{c2}, B e Q (valores aproximados e exatos).

$$H(S) = \frac{KS}{S^2 + BS + \omega_0^2} = \frac{2S}{S^2 + 0{,}2S + 1}$$

Onde: $\boxed{B = 0{,}2}$ e $\omega_0^2 = 1 \therefore \boxed{\omega_0 = 1}$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{1}{0{,}2} \therefore \boxed{Q = 5}$$

* Valores aproximados:

$$\omega_{c1} = \omega_0 - \frac{B}{2} = 1 - \frac{0{,}2}{2} \therefore \boxed{\omega_{c1} = 0{,}9 \text{ rad/s}}$$

$$\omega_{c2} = \omega_0 + \frac{B}{2} = 1 + \frac{0{,}2}{2} \therefore \boxed{\omega_{c2} = 1{,}1 \text{ rad/s}}$$

* Valores exatos:

$$\omega_{c1,c2} = \left(\mp \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \omega_0$$

$\boxed{\omega_{c1} = 0,905}$ e $\boxed{\omega_{c2} = 1,105}$ $\boxed{\omega_{c2} = 1,0950}$

Uso de diagramas de pólos e zeros

Usado para esboçar rapidamente as respostas em frequência.

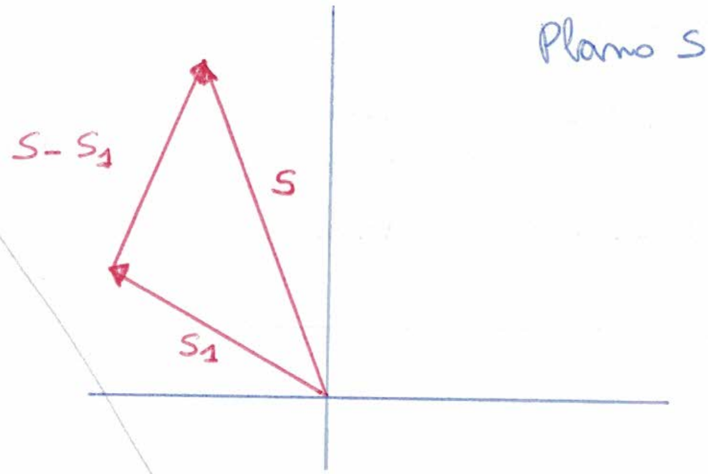
$$H(S) = K \frac{(S-z_1)(S-z_2)\dots(S-z_m)}{(S-P_1)(S-P_2)\dots(S-P_m)}$$

z's → zeros da função

P's → pólos " "

Cada um dos fatores é um nº complexo da forma $S - S_1$ e pode ser representado no plano S por um vetor, desenhado de S_1 para S.

Isto é verdadeiro, visto que, por soma vetorial, o vetor S é a soma dos vetores S_1 e $S - S_1$.



* O vetor $S - S_1$, pode ser escrito na forma polar, onde o seu módulo é o seu comprimento e a sua fase é o ângulo que ele faz com o eixo real (eixo positivo).

* Se $S = j\omega$, o ponto S está no eixo $j\omega$ e os fatores podem ser escritos como:

$$j\omega - z_i = N_i e^{j\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$j\omega - P_k = M_k e^{j\beta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

* Portanto a função desejada é:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad e$$

$$H(j\omega) = K \cdot \frac{N_1 e^{j\alpha_1} \cdot N_2 e^{j\alpha_2} \cdot \dots N_m e^{j\alpha_m}}{M_1 e^{j\beta_1} \cdot M_2 e^{j\beta_2} \cdot \dots M_n e^{j\beta_n}}$$

Onde, para $K > 0$, a amplitude é:

$$\boxed{|H(j\omega)| = K \frac{N_1 . N_2 . \ldots N_m}{M_1 . M_2 . \ldots M_n}} \quad (XII)$$

e a fase é:

$$\phi(\omega) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) \quad (XIII)$$

que podem ser diretamente medidos do diagrama de pólos e zeros.

* Se $K < 0$, então $K = |K| \angle 180°$, que devem ser considerados na amplitude e fase.

* Desta forma, para qq ponto $j\omega$, desenhamos os vetores de todos os pólos e zeros para $j\omega$, medimos seus comprimentos e ângulos, e calculamos a sua amplitude e ângulo (fase) com XII e XIII.

Exemplo 15.4 (Johnson)

Sendo $H(S) = \dfrac{4S}{S^2+2S+401}$, a partir do plano S, esboce as formas gráficas que representam a resposta em amplitude e fase de $H(j\omega)$.

Solução: Zero: 0

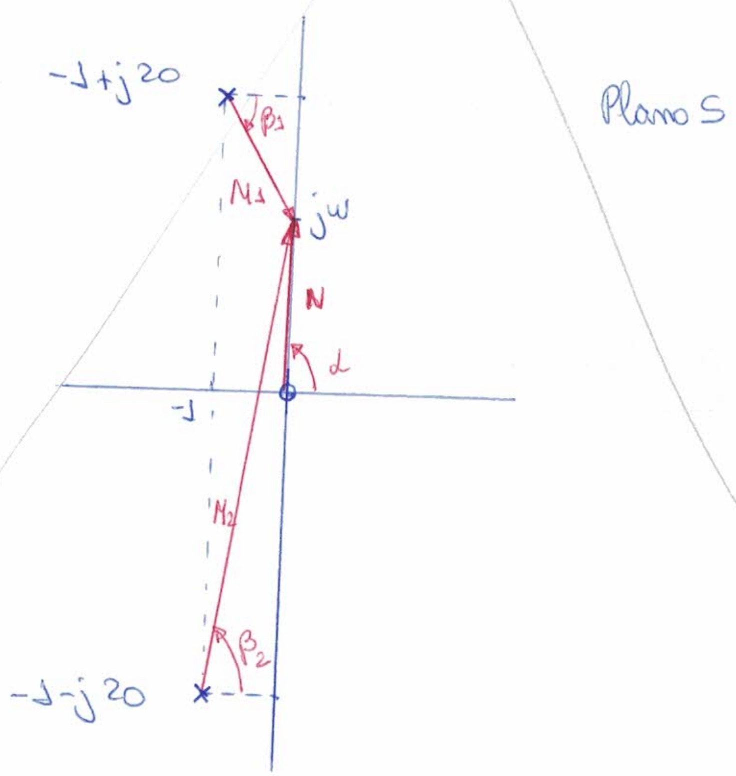
Pólos: $-1 \pm j20$

$$|H(j\omega)| = \frac{4N}{M_1 \cdot M_2}$$

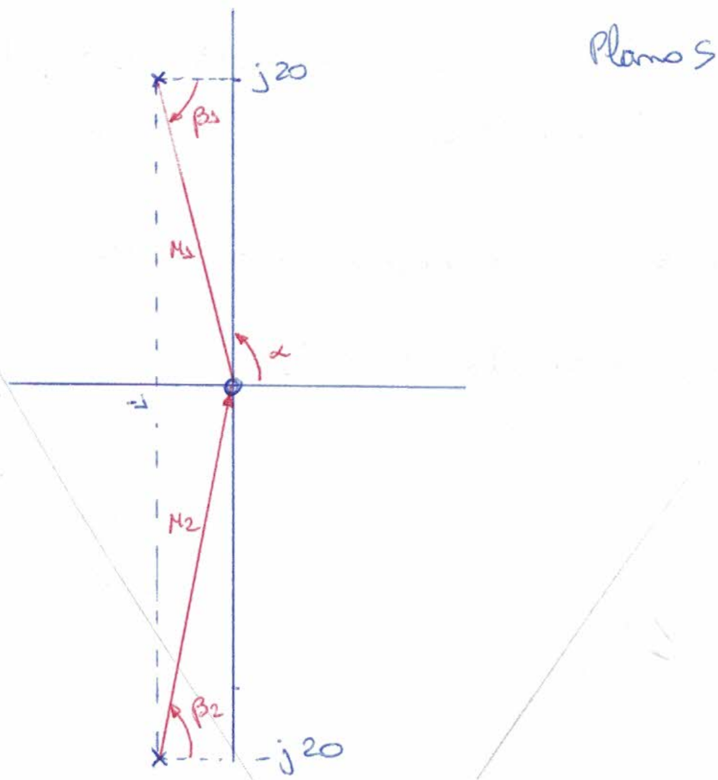
$$\phi(\omega) = \alpha - (\beta_1 + \beta_2)$$

$\boxed{\omega: 0 \longrightarrow \infty}$

$S - S_i$	$S_i \to$ pólo ou zero
$j\omega - S_i$	



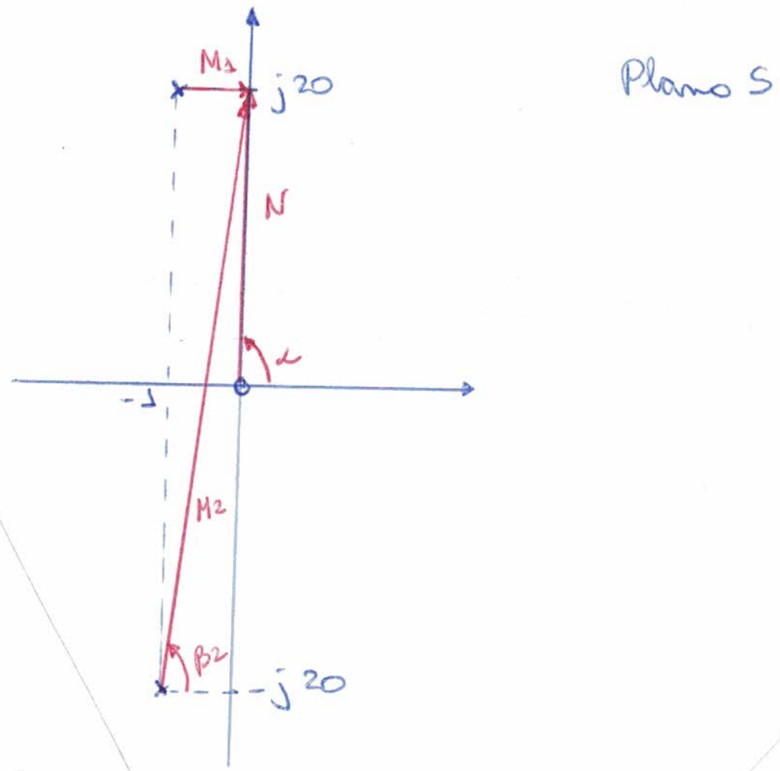
1) $\omega: 0^{+} \longrightarrow +\infty$, então $\alpha = 90°$. $\boxed{\text{Para } \omega = 0 \text{, temos:}}$



$$|H(j\omega)| = \frac{4.(0)}{\sqrt{1^2+20^2}.\sqrt{1^2+20^2}} = 0$$

$$\phi(\omega) = 90° - (-\tan^{-1}20 + \tan^{-1}20) = 90°$$

2) Para $\omega = 20$, temos:



$$|H(j\omega)| = \frac{4.(20)}{1.\sqrt{1^2+40^2}} = \frac{80}{\sqrt{1+1600}} \simeq 2$$

$$\phi(\omega) = 90° - (0° + \tan^{-1} 40) \simeq 0$$

* $\omega_0^2 = 401 \quad \therefore \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{401} \text{ rad/s}}$ da equação (VII)

$$H(S) = \frac{K S}{S^2 + BS + \omega_0^2}$$

3) Se $\boxed{\omega = \omega_h}$ é um valor muito elevado, por exemplo, 10^6, então todos os três vetores serão essencialmente verticais, de forma que:

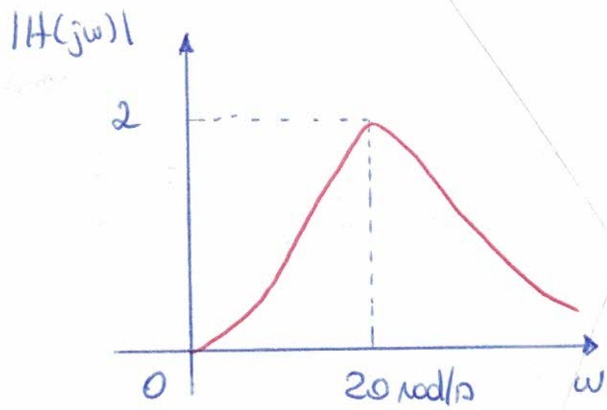
$N \simeq M_1 \simeq M_2 \simeq \omega_h$

$\alpha \simeq \beta_1 \simeq \beta_2 \simeq 90°$

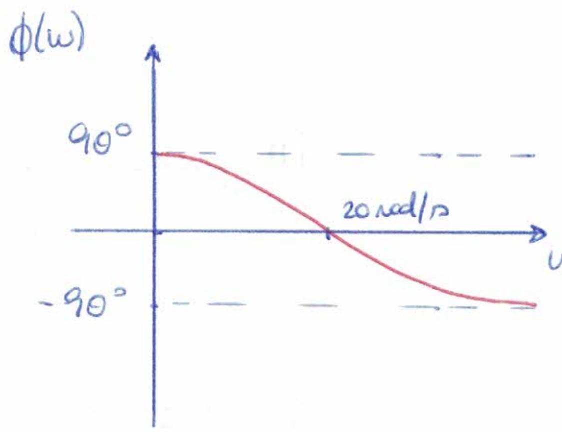
$|H(j\omega)| = \dfrac{4}{\omega_h}$ ∴ um valor muito pequeno

$\phi(\omega) = -90°$

Logo:



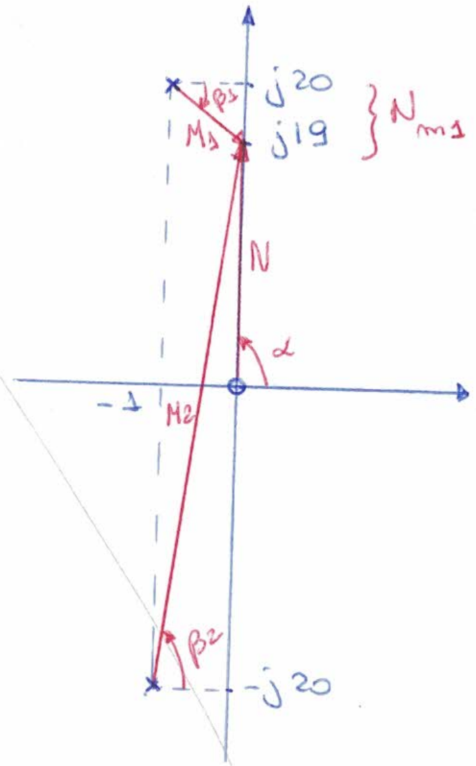
Resposta em amplitude



Resposta em fase

4) E as frequências de corte?

Podemos ter uma idéia grosseira!



$$|H(j\omega)| = \frac{4 \cdot N}{\sqrt{2} \cdot M_2}$$

$\boxed{M_1 = \sqrt{2}}$ * para caracterizar a freq. de corte

$$M_1 = \sqrt{N_{m1}^2 + (-1)^2} \quad (\sqrt{2})^2 = N_{m1}^2 + 1 \therefore \boxed{N_{m1} = 1}$$

Logo: $\boxed{N = 19}$

$$|H(j\omega)| = \frac{4\,(19)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (20+19)^2}} \therefore \boxed{|H(j\omega)| = 1{,}39}$$

$\boxed{\omega_{c1} = 19 \text{ rad/s}}$ e $\boxed{\omega_{c2} = 21 \text{ rad/s}}$

Os valores exatos calculados por (x) são:

$$\boxed{\omega_{c1} = 19{,}05 \text{ rad/s}} \quad e \quad \boxed{\omega_{c2} = 21{,}05 \text{ rad/s}}$$

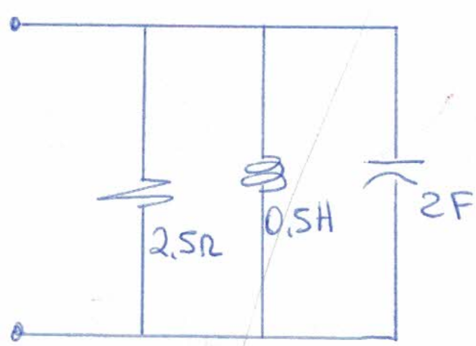
Exercícios recomendados: 15.5.1 e 15.5.2

Mudança de escala

Permite-nos analisar redes compostas por elementos de dimensões práticas fazendo uma mudança de escala nos valores dos elementos para permitir cálculos numéricos mais convenientes.

* Mudança de escala da amplitude e da frequência.

Exemplo:



$$|Z|_{máx} = 2{,}5 \ (\Omega)$$

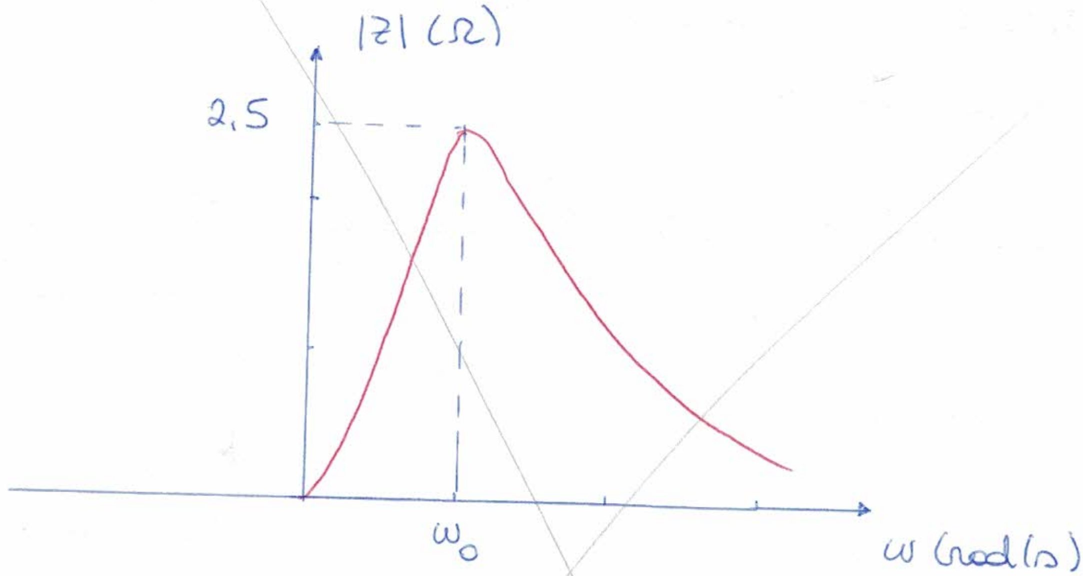
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \therefore \omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B} \qquad Q_0 = 5$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 0{,}2 \text{ rad/s}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C}\, s}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{k\, s}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right) s + \omega_0^2}$$

$$= \frac{k\, s}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$



Temos nºs convenientes para fazer cálculos mas um circuito pouco prático para construir.

Objetivo: Mudar a escala dessa rede de forma $|Z|_{máx} = 5.000\,\Omega$ e $\omega_0 = 5.10^6$ rad/s.

Podemos usar a mesma curva de resposta mostrada se cada nº na escala das ordenadas é aumentado de um fator de 2.000 e cada nº na escala das abscissas é aumentado de um fator de 5.10^6.

Mudança de escala de amplitude

Processo pelo qual a impedância de entrada de uma rede de dois terminais é aumentado de um fator km, permanecendo a frequência constante.

O fator km é real e positivo, podendo ser maior ou menor que a unidade.

Para aumentar a impedância de entrada de um fator km basta aumentar a impedância de cada elemento da rede pelo mesmo fator!

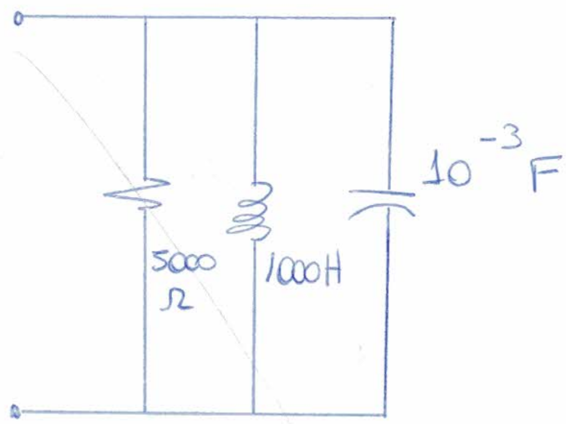
$R' \longrightarrow km.R$

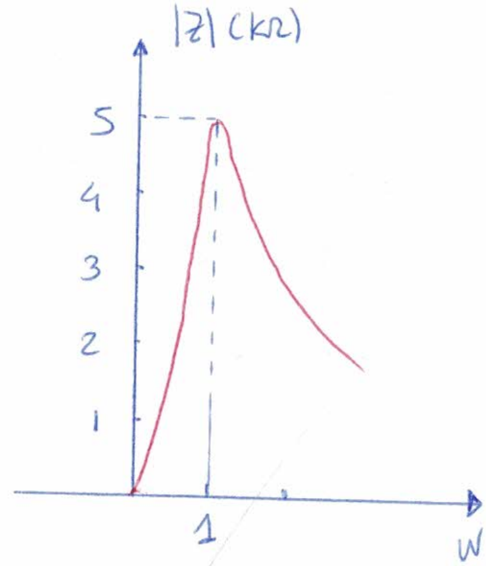
$L' \longrightarrow km.L$

$C' \longrightarrow \dfrac{C}{km}$

$$\boxed{\begin{aligned} Z(R) &= R.\,km \\ Z(L) &= SL.\,km \\ Z(C) &= \frac{1}{SC}.\,km \end{aligned}}$$

Quando cada elemento na rede dada tem sua escala de amplitude alterada por um fator de 2.000, resulta a seguinte rede:





Mudança de escala na frequência

Processo pelo qual a frequência em que qualquer impedância ocorre é aumentada de um fator k_f.

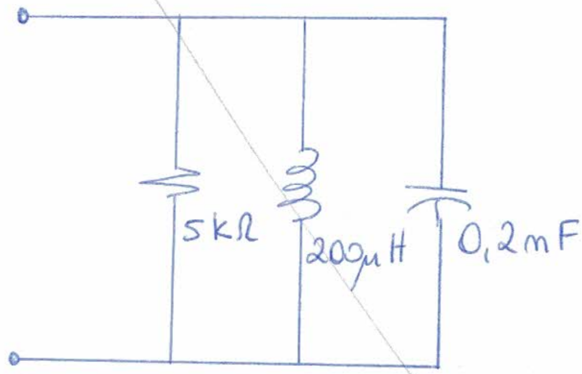
Para alterar em escala a frequência de uma função de rede por um fator de escala de frequência k_f, substituímos simplesmente s por s/k_f.

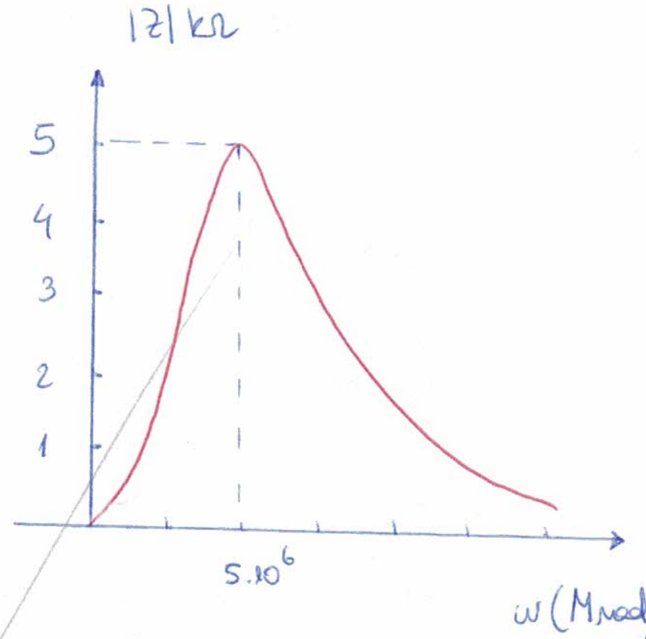
$$R' \rightarrow R \qquad Z(R) = R$$

$$L' \rightarrow \frac{L}{k_f} \qquad Z(L) = sL = \frac{s}{k_f} L = s \underbrace{\left(\frac{L}{k_f}\right)}_{L'}$$

$$C' \rightarrow \frac{C}{k_f} \qquad Z(C) = \frac{1}{sC} = \frac{1}{\frac{s}{k_f} \cdot C} = \frac{1}{s \underbrace{\left(\frac{C}{k_f}\right)}_{C'}}$$

Quando cada elemento da rede com escala de amplitude mudada tem sua escala de frequência alterada por um fator 5.10^6, é obtida a rede que segue:



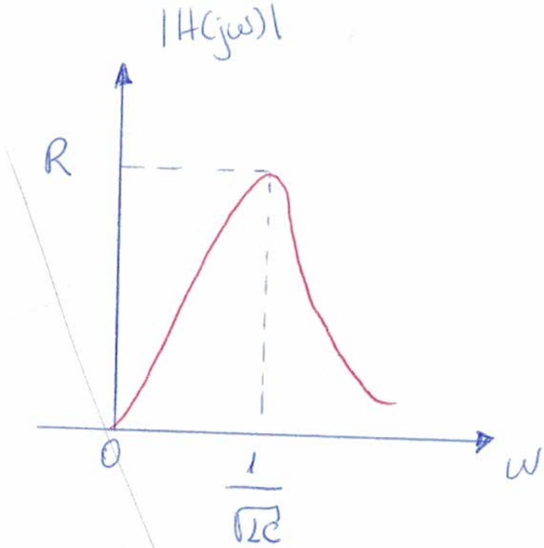


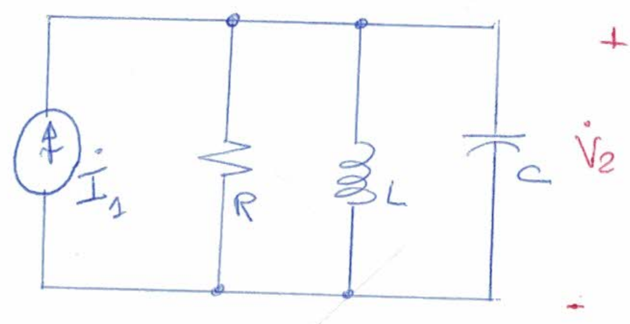
Os elementos do circuito nessa última rede têm valores que são facilmente obtidos em circuitos físicos (práticos). A rede pode ser efetivamente construída e testada!

<u>Exemplo:</u> Se a rede RLC dada é formada por um resistor de 1Ω, um indutor de 2H e um capacitor de $\frac{1}{2}$ F, então, para a função de rede

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{sL}}$$, temos uma resposta

em amplitude representada por;





com freq. de ressonância de 1 rad/s e uma amplitude de pico de 1 Ω.

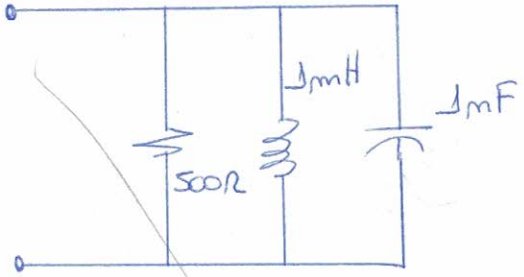
Suponha que alteremos em escala a amplitude e a frequência da rede para obter uma freq. de ressonância de 10^6 rad/s, usando um capacitor de 1 nF. Então teremos $K_f = 10^6$, e a nova escala de amplitude é:

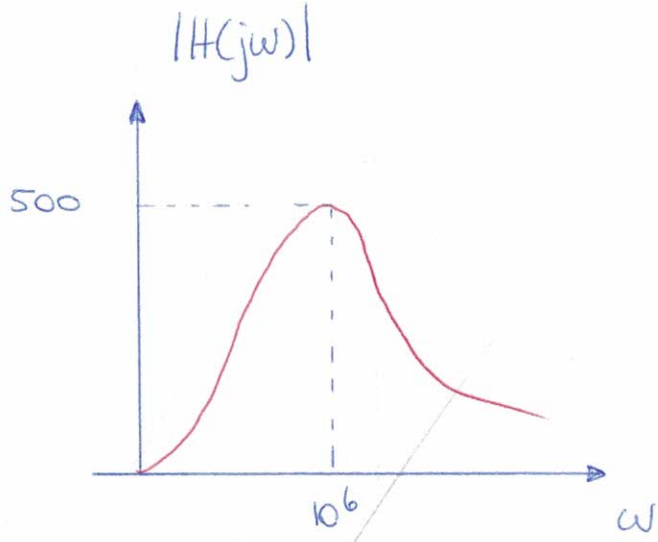
$$C' = 10^{-9} = \frac{1/2}{km \cdot k_f} \quad \therefore \quad km = \frac{1/2}{10^{-9} \cdot 10^6} \quad \boxed{km = 500}$$

$$C' = \frac{C}{km \cdot kf}$$

$$L' = \frac{2\,km}{kf} \quad \boxed{L' = 1\,mH} \quad e \quad R' = 1\,km$$

$$\boxed{R' = 500\,\Omega}$$





Resposta em amplitude

* Mudança de escala em frequência:

A impedância de qualquer indutor é SL, e se essa mesma impedância deve ser obtida em uma frequência k_f vezes maior, a indutância deverá ser substituída por uma indutância L/k_f.

De modo similar, uma capacitância C deve ser substituída por uma capacitância C/k_f.

Diagramas de Bode

* Método rápido para obter aproximadamente a variação de amplitude e fase de uma dada função de transferência como função de ω.

* Obter uma visualização melhor do que a do gráfico de pólos e zeros.

A escala em Decibel (dB)

A resposta aproximada é chamada de:

gráfico assintótico; ou
gráfico de Bode; ou
diagrama de Bode.

* As curvas de fase e módulo são mostradas em função de uma escala logarítmica de frequências na abscissa, e o módulo é indicado em unidades logarítmicas chamados de decibéis (dB).

* A unidade decibel nos permite dizer, com alguma precisão normalizada, o grau no qual a frequência é atenuada.

* Definimos o valor de $|H(j\omega)|$ em dB como:

$$H_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

onde se usa a base logarítmica comum (base 10).

Exemplos: $|H(j\omega)| = 1 \iff H_{dB} = 0$

$|H(j\omega)| = 2 \iff H_{dB} \approx 6\ dB$

$|H(j\omega)| = 10 \iff H_{dB} = 20\ dB$

↳ um aumento de 10 vezes em $|H(j\omega)|$ corresponde a um aumento de 20 dB em H_{dB}.

Obs.: * $\log 10^m = m$, então $\boxed{10^m \iff \overset{20 \log |H(j\omega)|}{20m\ (dB)}}$

Ex: $1000 = 10^3$ corresponde a 60 dB

$0,01 = 10^{-2}$ " a -40 dB

* $20 \log 5 = 20 \log (10/2) = 20 \log 10 - 20 \log 2$
$= 20 - 6 = 14\ dB$

$\boxed{5 \iff 14\ dB}$

Exercícios: Calcule H_{dB} em $\omega = 146$ rad/s se $H(s)$ é:

a) $\dfrac{20}{s+100}$

b) $20(s+100)$

c) $20s$

Calcule $|H(j\omega)|$ se H_{dB} é:

d) 29,2 dB e) −15,6 dB f) −0,318 dB

Obs: a operação inversa é:

$$\boxed{|H(j\omega)| = 10^{H_{dB}/20}}$$

Resp.: −18,94dB; 71 dB; 69.3dB; 28,8; 0,1660 e 0,964

Determinação das assíntotas

* Fatorar H(S) para mostrar seus pólos e zeros.

Exemplo: $H(s) = 1 + \frac{s}{a}$ Zero: $s = -a$

O diagrama de Bode dessa função consiste em duas curvas assintóticas aproximadas para valores muito pequenos e grandes de ω.

$$|H(j\omega)| = \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

$$H_{dB} = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

Quando $\omega << a$

$$H_{dB} = 20 \log 1 = 0 \quad \therefore \quad \omega << a$$

Quando $\omega >> a$

$$H_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{a}$$

~~$\omega = a \therefore H_{dB} = 0$~~ $\quad 20 \log 1 = 0$

$\omega = 10a \therefore H_{dB} = 20\,dB$

$\omega = 100a \therefore H_{dB} = 40\,dB$

$\omega = 1000a \therefore H_{dB} = 60\,dB$

Logo, o valor de H_{dB} cresce 20 dB para cada aumento de 10 vezes a frequência.

A assíntota tem portanto uma inclinação de 20 dB/década.

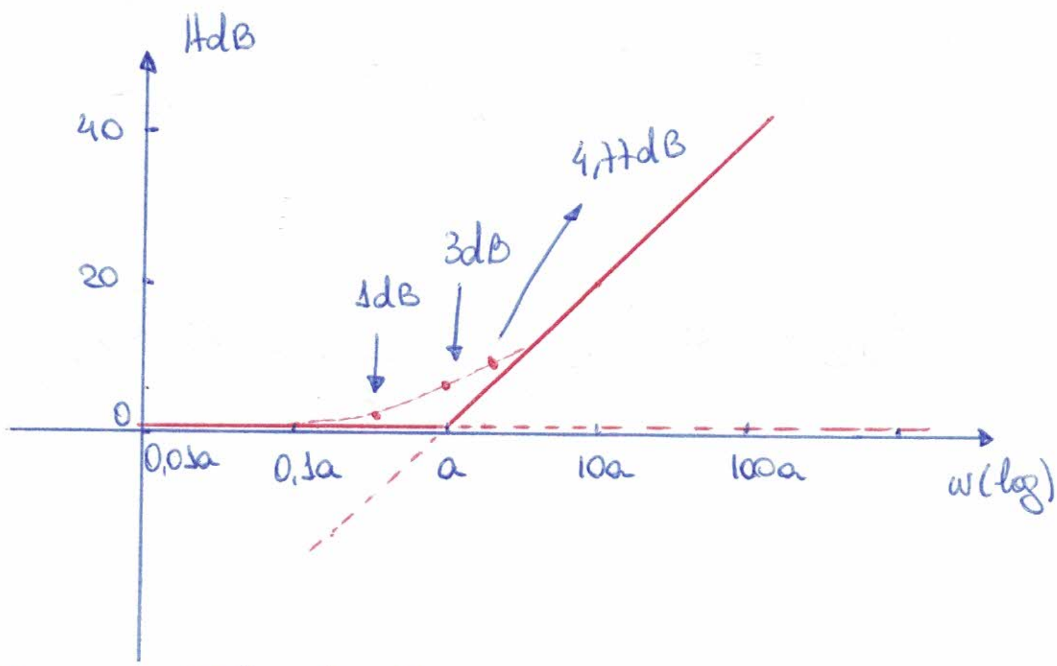


Diagrama de Bode para $H(S) = 1 + \frac{S}{a}$.

As duas assintotas se interceptam em $\omega = a$.
Essa frequência também é chamada de frequência de canto, quebra, corte, ou de meia potência.

Suavizando diagramas de Bode

p/ $\omega = a$

$\sqrt{2}$ → freq. de corte

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} \cong 3 \text{ dB}$$

p/ $\omega = 0{,}5a$

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1{,}25} \approx 1 \text{ dB}$$

p/ $\omega = 2a$

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{5} \approx 7 \text{ db}$$

Termos múltiplos

Exemplo: $H(s) = K \left(1 + \frac{s}{s_1}\right)\left(1 + \frac{s}{s_2}\right)$

Onde k = constante e $-s_1$ e $-s_2$ representam os dois zeros de $H(s)$.

$$H_{dB} = 20 \log \left| k \left(1 + \frac{j\omega}{s_1}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{s_2}\right) \right|$$

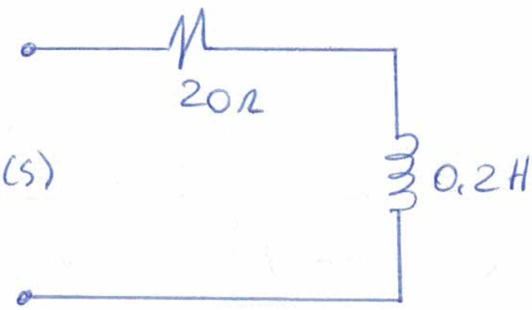
$$H_{dB} = 20 \log \left| k \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2} \right|$$

$$H_{dB} = 20 \log k + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}$$

Obs.: Podemos esboçar H_{dB} simplesmente fazendo a soma dos gráficos dos termos separados.

<u>Exemplo:</u> Obtenha o diagrama de Bode da impedância de entrada da rede mostrada.

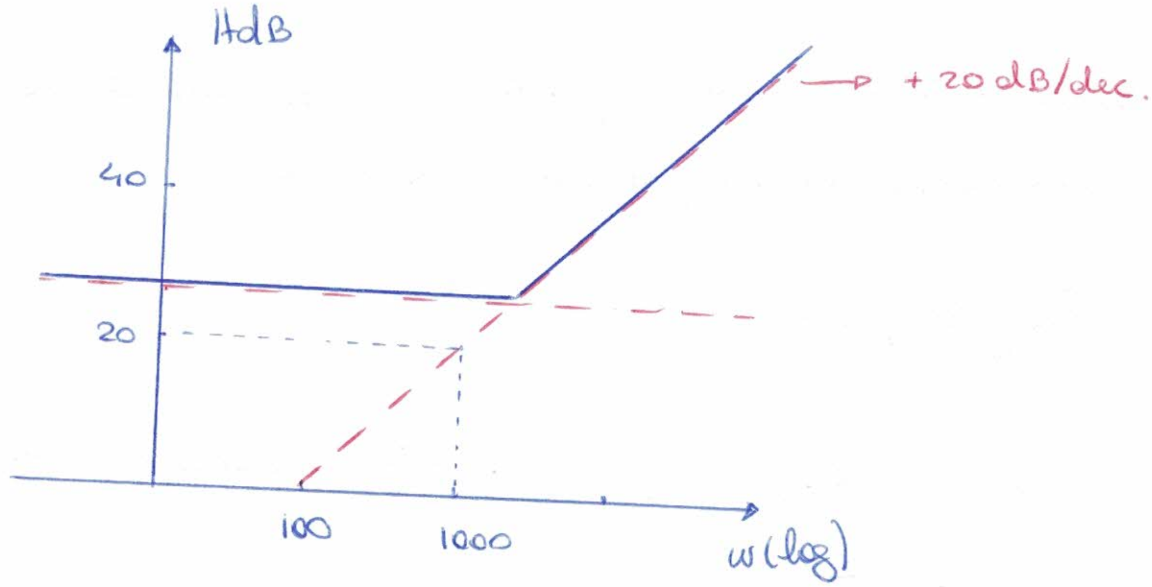
$H(s) = Z_{ent}(s)$



$$Z_{ent}(s) = H(s) = 20 + 0{,}2s$$

$$H(s) = 20\left(1 + \frac{s}{100}\right)$$

Os dois fatores que constituem H(S) são um zero em $S = -100$, e uma constante equivalente a $20 \log 20 = 26\,dB$.



Exercício: Construa o diagrama de Bode para o módulo de $H(S) = 50 + S$.

Resp: 24 dB, $\omega < 50$ rad/s; inclinação $= +20$ dB/dec, $\omega > 50$ rad/s

Resposta em fase

Retornando à $H(S) = 1 + \frac{s}{a}$, queremos agora determinar a resposta em fase do zero simples.

$$\text{âng}\, H(j\omega) = \text{âng}\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right) = tg^{-1}\,\frac{\omega/a}{1} = tg^{-1}\,\frac{\omega}{a}$$

* para $\omega \ll a$: $\text{âng}\, H(j\omega) \approx 0°$ ~~e usamos isto como nossa assíntota quando $\omega < 0{,}1a$~~

~~$\text{âng}\, H(j\omega) = 0° \rightarrow \omega < 0{,}1a$~~

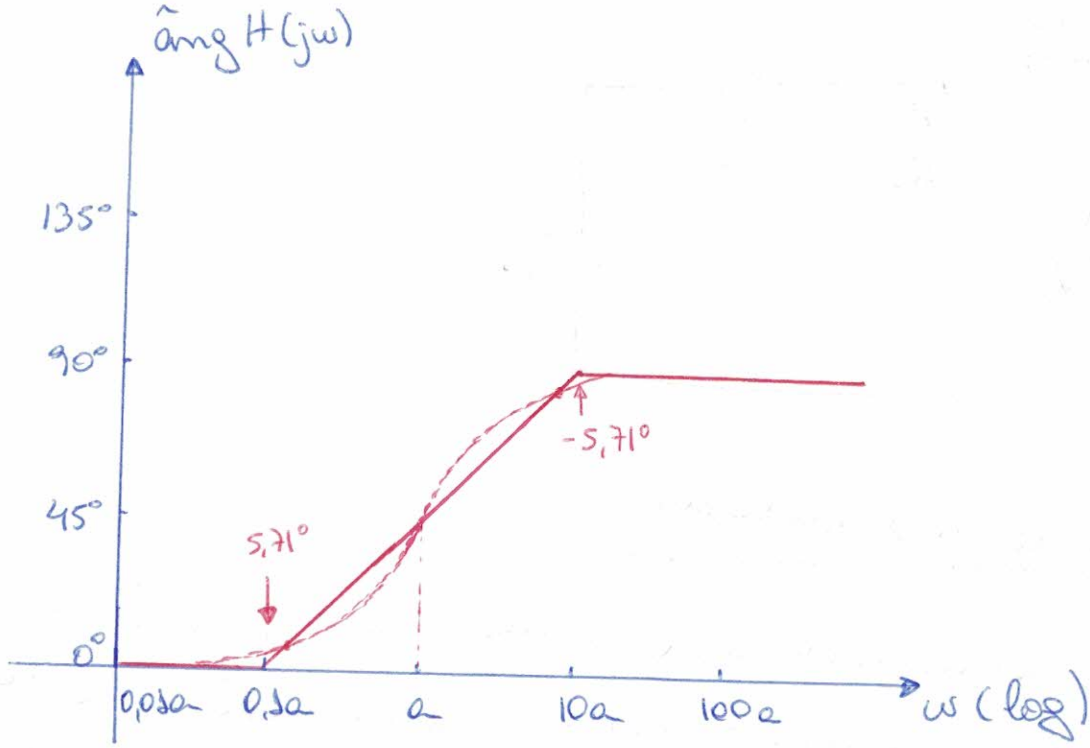
* para $\omega \gg a$, $\text{âng}\, H(j\omega) \approx 90°$ ~~e usamos isto acima de $\omega = 10a$~~

~~$\text{âng}\, H(j\omega) = 90° \rightarrow \omega > 10a$~~

* para $\omega = a$, $\text{âng}\, H(j\omega) = 45°$

Construímos então uma assíntota representada por uma linha reta de $0°$ em $\omega = 0{,}1a$ até $90°$ em $\omega = 10a$, passando por $45°$ em $\omega = a$.

Essa linha reta tem uma inclinação de 45°/década.



Exercício: Desenhe o diagrama de Bode para a fase da função de transferência $H(S) = 20\left(1 + \frac{S}{100}\right)$.

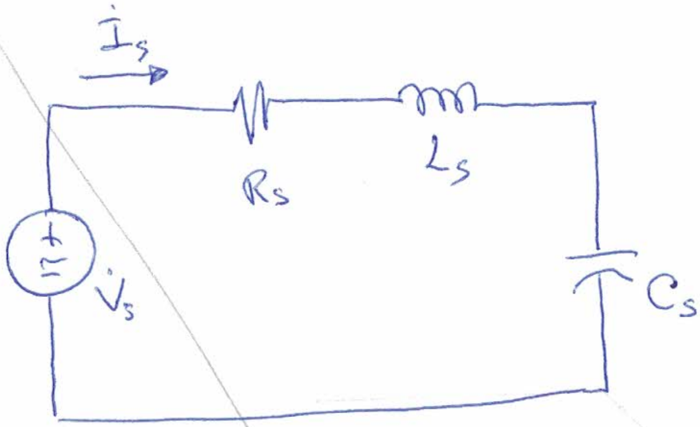
Obs.: exercício anteriormente já analisado circuito

Resp.: $0°$, $\omega \leq 10$; $90°$, $\omega \geq 1000$; $45°$, $\omega = 100$;

$45°$/déc. de inclinação, $10 < \omega < 1000$.

Exercícios: 15.1/3/7/13/15/17/23/31/35/39

Ressonância série



* Conceito de dualidade:

a) A frequência de ressonância ω_0 é a frequência na qual a parte imaginária da impedância de entrada se anula, ou, em outras palavras, o ângulo da impedância se torna igual a zero.

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_s . L_s}}}$$

b) $\underbrace{Q_0 = \omega_0 R C}_{RLC||}$ $\qquad$ $\underbrace{Q_0 = \frac{\omega_0 L_s}{R_s}}_{RLC \text{ série}}$

c) Definimos duas frequências de meia potência, ω_{c1} e ω_{c2}, como as frequências nas quais o módulo da impedância e $\sqrt{2}$ vezes o módulo mínimo da impedância (eles também são as frequências nas quais a resposta de corrente é 70,7% da resposta máxima).

Que corresponde ao máx. da admitância

Não precisa!

$$\dot{I}_s = \frac{\dot{V}_s}{R_s + j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s}}$$

$$Y(S) = H(S) = \frac{\dot{I}_s(S)}{\dot{V}_s(S)} = \frac{1}{R_s + j\left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s}\right)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R_s^2 + (\underbrace{\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s}}_{0})^2}} \Rightarrow Z \text{ série mínimo}$$

$$\boxed{|H(j\omega)| = |H(j\omega_0)| = \frac{1}{R}}$$

$|H(j\omega)| \to 0$ quando $\omega \to \infty$

$|H(j\omega)| \to 0$ quando $\omega \to 0$

* Como na ressonância em série a impedância do circuito é igual a R, a impedância é mínima.

* As expressões exatas para ω_{c1} e ω_{c2} são:

$$\omega_{c1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

* As expressões aproximadas (Q_0 alto) são:

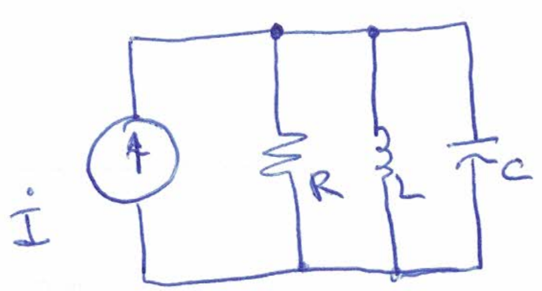
$$\omega_{c1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2} B$$

* A largura de faixa de meia potência B é:

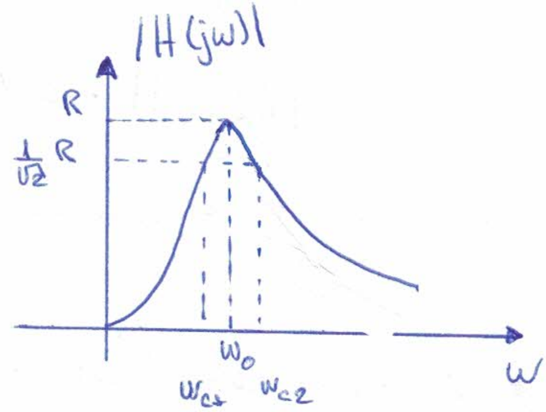
$$B = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

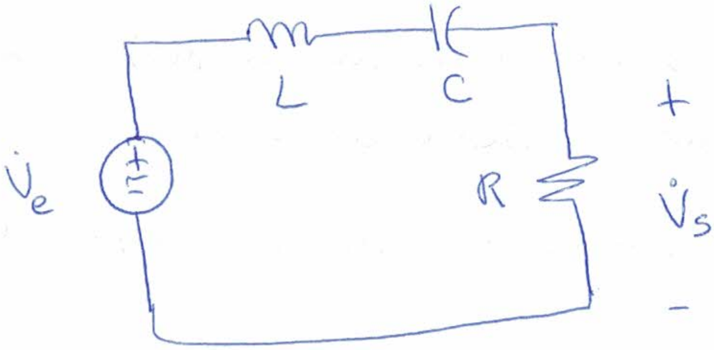
Filtros PASSIVOS

1) Filtro passa-faixa



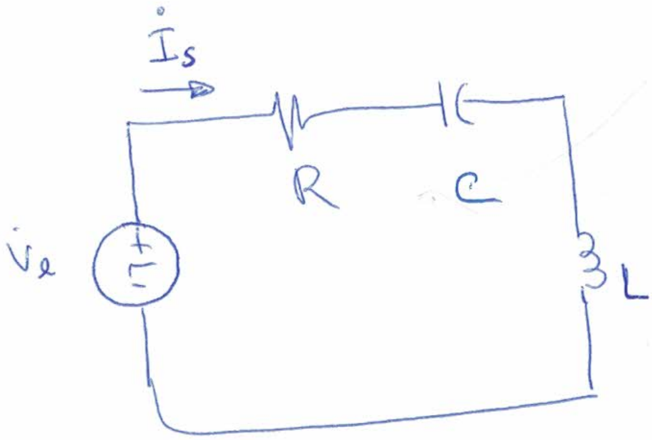
circuito RLC ||





$$H(S) = \frac{\dot{V}_s(S)}{\dot{V}_e(S)}$$

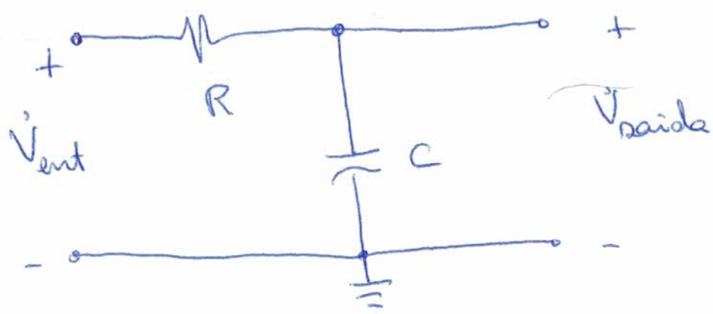
circuito RLC série (passa faixa ou corta-faixa)



$$H(S) = \frac{\dot{I}_s(S)}{\dot{V}_e(S)}$$

circuito RLC série

2) Filtro passa-baixas

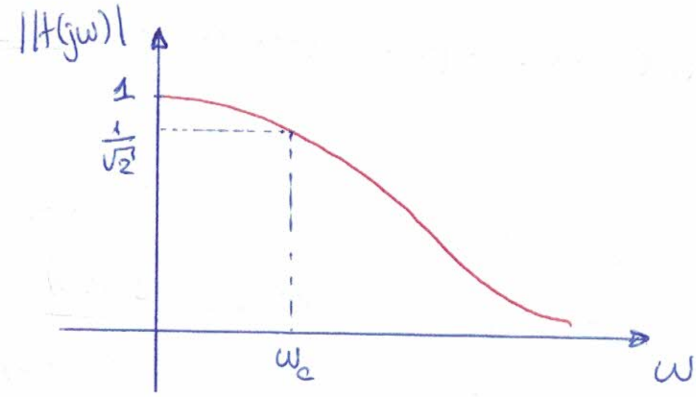


$$H(S) = \frac{\dot{V}_{saida}}{\dot{V}_{entrada}} = \frac{1}{1+RCs}$$

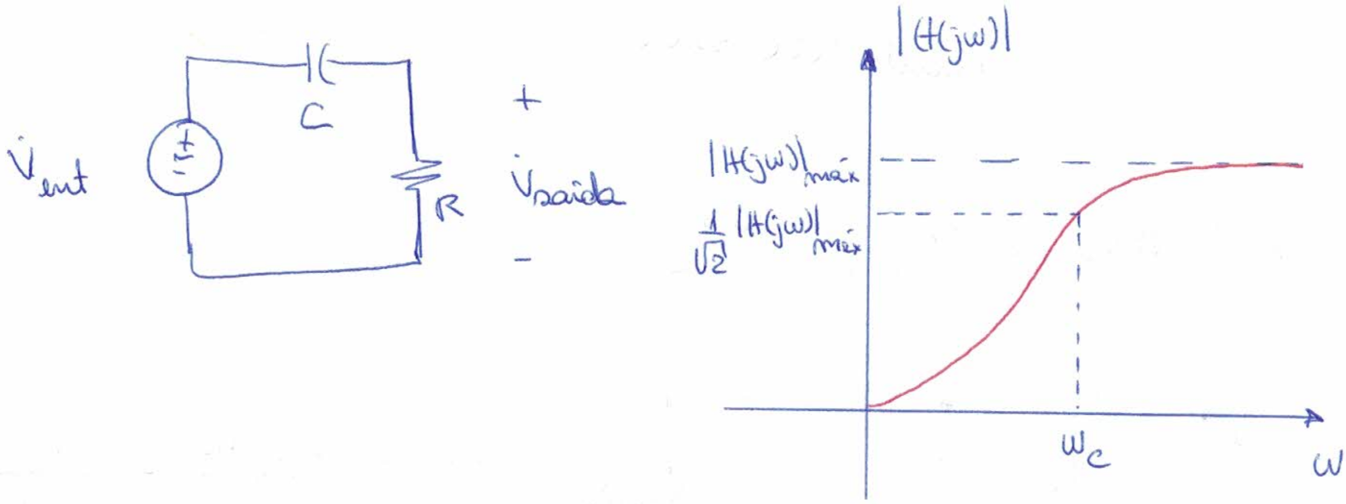
H(S) tem uma única frequência de corte em $\omega = \frac{1}{RC}$ e um zero em $S = \infty$, o que leva a seu comportamento de filtro "passa-baixos".

* Baixas frequências ($S \to 0$) resulta em $H(S)$ próximo ao seu valor máximo (unitário ou 0 dB).

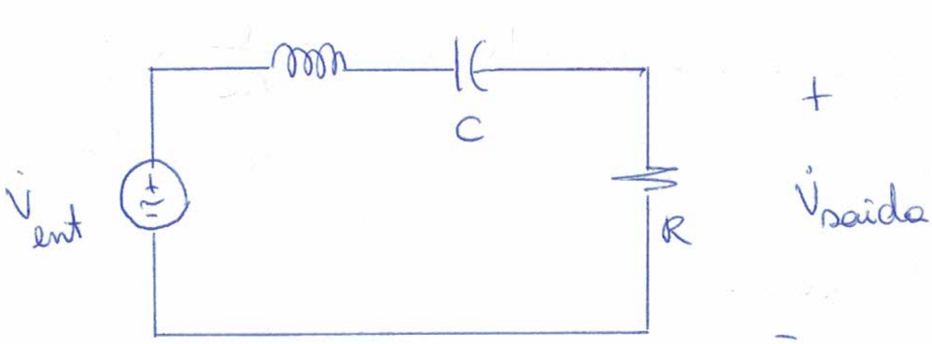
* Altas frequências ($S \to \infty$) resulta em $H(S) \to 0$.

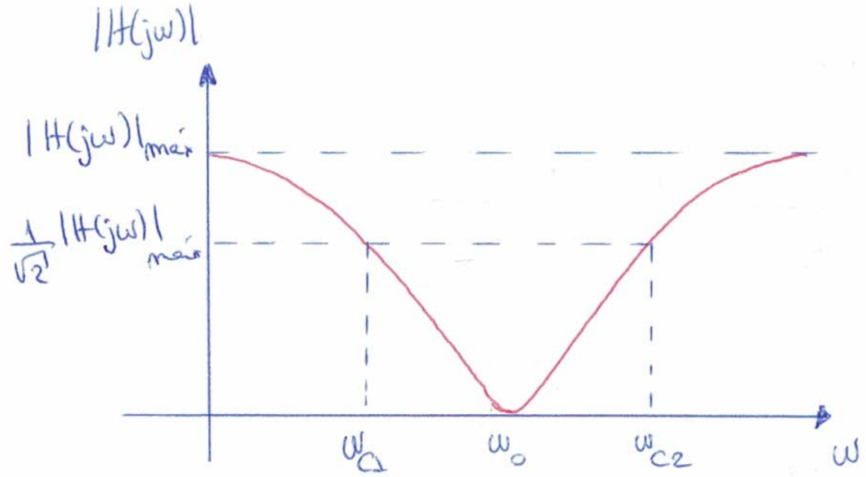


3) Filtro passa-altas



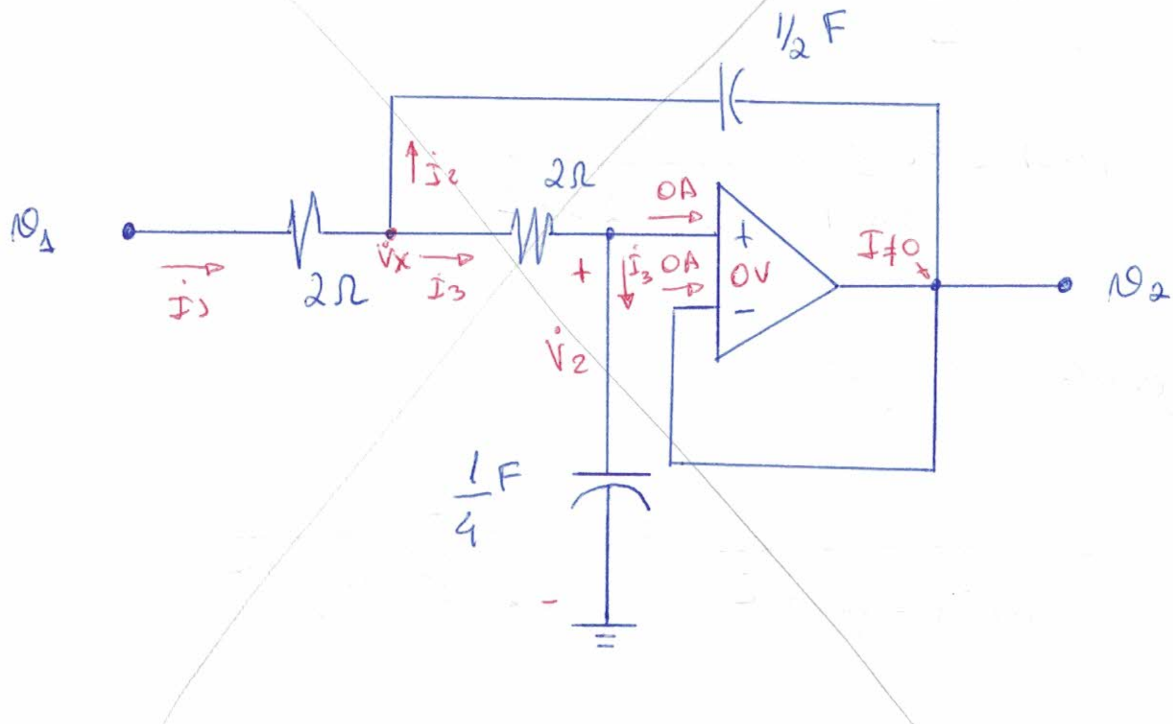
4) Filtro corta-faixa





Filtros ATIVOS

Exemplo: filtro passa-baixas



$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

$$\frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_x}{2} = \frac{\dot{V}_x - \dot{V}_2}{2/s} + \frac{\dot{V}_x - \dot{V}_2}{2}$$

$\vdots$

$$\dot{V}_x = f(\dot{V}_1, \dot{V}_2)$$

$\vdots$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{V}_x - \dot{V}_2}{2}$$

$\vdots$

$$\dot{I}_3 = f(\dot{V}_1, \dot{V}_2)$$

$\vdots$

$$\dot{V}_2 = \frac{4}{s} \cdot \dot{I}_3$$

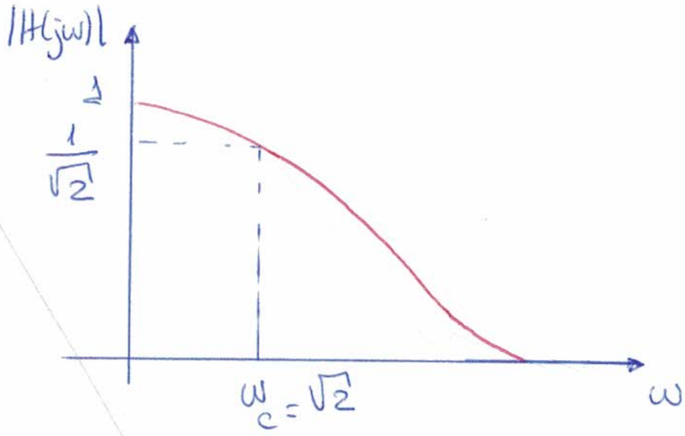
$\vdots$

$$H(s) = \frac{\dot{V}_2(s)}{\dot{V}_1(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

Fazendo $s = j\omega$

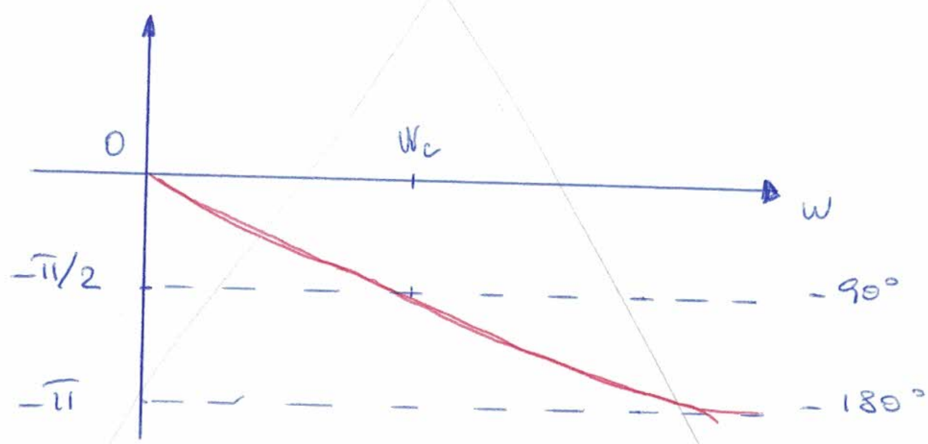
$$H(j\omega) = \frac{2}{-\omega^2 + 2j\omega + 2} = \frac{2}{(2-\omega^2) + j\omega 2}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^4/4)}}}_{\text{resposta de amplitude}}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,|H(j\omega)|_{máx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^4}{4}}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}$$ :: resposta de fase



Fator de Qualidade (complemento)

$$Q = \text{fator de qualidade} = 2\pi \frac{\text{quantidade máxima de energia que pode ser armazenada no circuito}}{\text{energia perdida durante um período completo da resposta}}$$

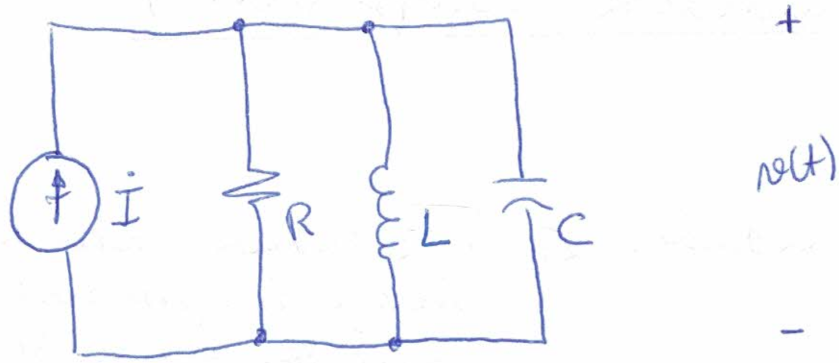
* A constante 2π é incluída na definição para simplificar as expressões mais úteis.

* Como energia pode ser armazenada apenas no indutor e no capacitor, e perdida apenas no resistor, podemos expressar Q em termos da energia instântanea associada a cada um dos elementos reativos e da potência média P_R dissipada no resistor:

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{max}}{P_R T}$$

sendo T o período da frequência senoidal na qual se avalia Q.

Voltando ao circuito RLC paralelo inicial:



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

sendo $i(t) = I_m \cos\omega_0 t$, obtemos a resposta de tensão correspondente na ressonância, como:

$$v(t) = R\,i(t) = R I_m \cos\omega_0 t$$

A energia armazenada no capacitor é:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2}\cos^2\omega_0 t$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Já a energia instantânea armazenada no indutor é:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \underbrace{\left(\frac{1}{L}\int v\,dt\right)^{2}}_{i^2} = \frac{1}{2L}\left[\frac{R I_m}{\underbrace{\omega_0}_{=\frac{1}{\sqrt{LC}}}} \operatorname{sen}\omega_0 t\right]^2$$

de modo que:

$$w_L(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2}\operatorname{sen}^2\omega_0 t$$

A energia armazenada instantânea total é:

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2}$$

E esse valor constante deve ser o valor máximo!

A energia perdida no resistor durante um período é a potência média por ele absorvida:

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

$$P_R . T = \frac{1}{2 f_0} I_m^2 R$$

Determinamos então Q na ressonância (Q_0):

$$Q_0 = 2\pi \frac{\frac{I_m^2 R^2 C}{2}}{\frac{I_m^2 R}{2 f_0}}$$

$$Q_0 = \underbrace{2\pi f_0}_{w_0} RC = w_0 RC$$

∴ Válida apenas para o circuito RLC simples!