

## Capítulo 5

# Robustez de Estabilidade e Robustez de Desempenho

*Apresenta-se neste capítulo o conceito de família de plantas e sua formulação matemática mais adequada para se trabalhar em controle  $H_\infty$ , que é através do conceito de função de transferência de perturbação. Formulam-se então as condições para se ter robustez de estabilidade e robustez de desempenho para o casos de sistemas SISO. Finalmente, os conceitos de planta estentida e o problema de sensibilidade mista S/T/KS é introduzido.*

### 5.1 Introdução

Vimos que alguns sinais, como o distúrbio  $d(t)$  e o ruído/erro de medida  $n(t)$  que estão presentes em um sistema de controle em malha fechada, além de serem incertos, causam efeitos indesejáveis. Entretanto, eles não afetam a estabilidade do sistema em malha fechada. De fato, robustez de estabilidade tem a ver com incertezas no modelo da planta  $G(s)$  e não com os sinais  $d(t)$ ,  $n(t)$ . Até agora, procuramos dar robustez de estabilidade ao sistema em malha fechada alterando diretamente a chamada função sensibilidade  $S$  (mais especificamente, fazendo com que  $\|S\|_\infty$  fosse pequeno o suficiente).

Quando podemos quantificar as incertezas de um modelo, é possível trabalhar com o que chamamos de *famílias de plantas*, que é uma família contínua e bem delimitada de funções (ou matriz de funções) de transferência. As incertezas no modelo normalmente são [Lju99]:

1. **incertezas paramétricas:** alguns ou todos os parâmetros das funções de transferência possuem incertezas na forma de um intervalo de valores possíveis;
2. **dinâmica não-modelada:** neste caso, as incertezas se apresentam na própria estrutura das funções de transferência, como polos e zeros desconhecidos e até mesmo atrasos de transporte.
3. **não-linearidades:** como por exemplo não-linearidades estáticas no problema de estabilidade absoluta ou problema de Lurie [FPC20].

No caso das incertezas paramétricas, para cada combinação possível de valores de parâmetros, existe uma planta possível que é membro da família de plantas. Entretanto, neste caso, todos os membros da mesma família têm o mesmo número de pólos e zeros. Podemos então representar a família por funções de transferência. Já para o caso de

dinâmica não-modelada, os diferentes membros da família podem ter números diferentes de polos e zeros. Neste caso, é mais conveniente representar a família a partir de suas respostas em frequência, que podem representar sistemas até de ordem infinita, como sistemas com atraso. Podemos ainda incluir as não-linearidades como incertezas desde que estas possam ser colocadas na forma de não-linearidades estáticas delimitadas em um setor, como acontece com o *problema da estabilidade absoluta* ou *problema de Lurie* [DP13, PC19].

A definição matemática precisa será dada mais adiante, mas já podemos atualizar o conceitos de *robustez de estabilidade*, que é portanto a capacidade do sistema de controle manter a estabilidade em malha fechada para toda a família de plantas, e *robustez de desempenho*, que a capacidade do sistema de manter o mesmo desempenho para toda a família de plantas. A robustez é uma propriedade do sistema em malha fechada, mas quem obviamente confere esta característica é o controlador por realimentação projetado.

## 5.2 Família de Plantas

Uma típica família de plantas é apresentada na Fig. 5.1a. A curva vermelha representa a planta nominal. Em torno de cada ponto desta curva, pode-se traçar uma circunferência (marcadas em laranja) que representa a incerteza da planta naquela frequência. Deste modo, para a frequência  $\omega$  temos uma circunferência de centro em  $G(j\omega)$  e de raio igual a  $|W_T(j\omega)G(j\omega)|$ , onde  $W_T(j\omega)$  é uma função de transferência que representa o erro máximo que pode haver na planta para cada  $\omega$ . Tipicamente,  $|W_T(j\omega)|$  aumenta com essa variável, como pode ser visto na Fig. 5.2. Qualquer ponto dentro da circunferência pode então ser representado por:

$$G_P(j\omega) = G(j\omega) + W_T(j\omega)\delta(j\omega)G(j\omega) = G(j\omega)(1 + W_T(j\omega)\delta(j\omega))$$

onde  $\delta(j\omega)$  é uma função de transferência estável com  $|\delta(j\omega)| \leq 1$  conhecida como *perturbação*.

O contorno determinado pelas circunferências representa os limites da família de plantas. A incerteza de fase em cada frequência pode ser determinada passando-se duas retas partindo da origem e tangenciando as circunferências. O ângulo entre as duas retas representa a incerteza de fase. Pode-se notar na Fig. 5.1b que no caso da circunferência rosa, que corresponde a uma frequência mais baixa, a incerteza de fase é menor do que no caso da circunferência verde que corresponde a um frequência mais alta. No caso da circunferência azul, vê-se que ela envolve a origem, o que significa que a incerteza na fase é total. Quanto mais próxima a circunferência está da origem, maior tende a ser a incerteza de fase.

Por fim, costuma-se supor que  $W_T(j\omega)$  e  $\delta(j\omega)$  são estáveis, o que significa dizer que o número  $P$  (número de polos de malha aberta no semiplano direito) é sempre o mesmo para qualquer família de plantas.

## 5.3 Robustez de Estabilidade

### 5.3.1 Modelo de Perturbações Multiplicativas

O modelo do sistema em malha fechada com incertezas multiplicativas (ou seja, com perturbação  $\delta(j\omega)$ ) é apresentado na Fig. 5.3a. Se fizermos  $\delta(j\omega) \equiv 0$  (o que é equivalente a abrir a malha), podemos determinar a função de transferência em "malha aberta":

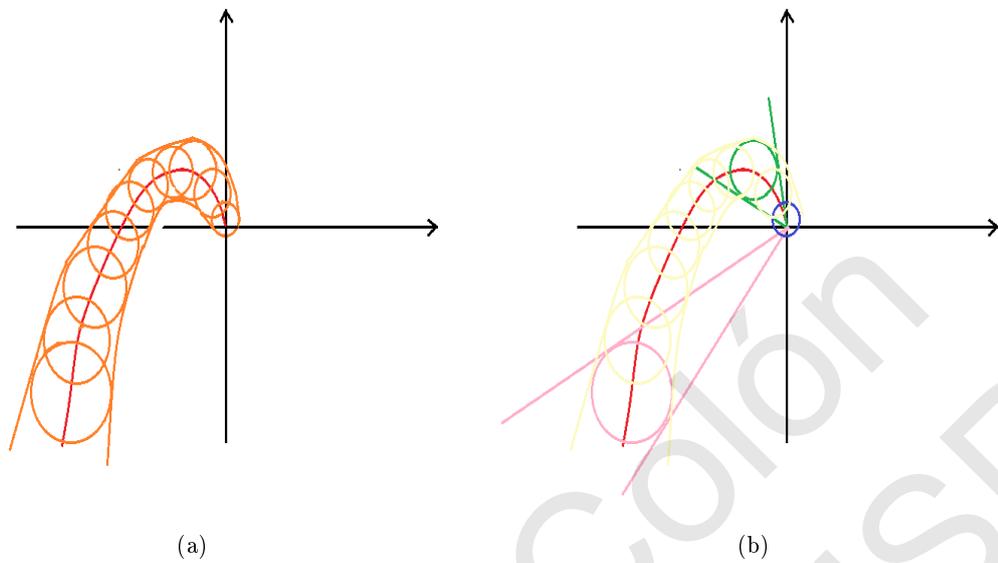


Figura 5.1: (a) Nyquist da Família de Plantas (b) Incerteza na Fase.

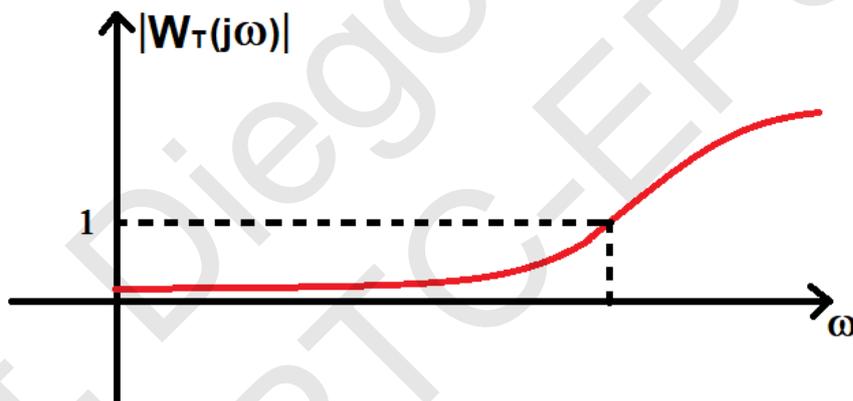


Figura 5.2: Função Peso de Erro

$$\frac{q}{p} = -\frac{WL}{1+L} = -WT = -H(j\omega)$$

de modo que o sistema fica simplificado para aquele apresentado na Fig. 5.3b. Nota-se então que tudo se passa como se tivéssemos um novo sistema em malha fechada onde  $\delta(j\omega)$  é a função de transferência de ramo direto,  $H(j\omega)$  é a função de transferência de realimentação e a referência fosse nula. Deste modo, para que haja estabilidade em MF para qualquer  $\delta(j\omega)$ , podemos aplicar o critério de Nyquist, onde a função de transferência de malha aberta fica  $\delta(j\omega)H(j\omega)$ :

1. Como  $W(j\omega)$ ,  $\delta(j\omega)$  e  $T(j\omega)$  são estáveis (as duas primeiras por hipótese e a última porque sempre o sistema nominal em malha fechada deve ser estável), então  $P = 0$  para qualquer  $\delta(j\omega)$ .
2. Como para qualquer  $\delta(j\omega)$  o sistema em malha fechada na Fig. 5.3b deve ser estável,

então  $Z = 0$ .

Deste modo, deveremos ter  $N = 0$ , o que significa que o gráfico de Nyquist de  $1 + \delta(j\omega)H(j\omega) \neq 0$  para qualquer  $\delta(j\omega)$ , o que é possível somente se  $|1 + \delta(j\omega)H(j\omega)| > 0$ . Como se tratam de números complexos, a pior situação ocorre quando  $1 - |\delta(j\omega)H(j\omega)| > 0$ , e como  $|\delta(j\omega)| \leq 1$ , a pior situação ocorre para  $|\delta(j\omega)| = 1$ , o que significa dizer que  $|H(j\omega)| = |W(j\omega)T(j\omega)| < 1$  para qualquer frequência, ou seja,  $|T(j\omega)| < 1/|W(j\omega)|$ , que é a condição de robustez de estabilidade. Por fim, esta condição também será satisfeita se impusermos  $\|WT\|_\infty < 1$ .

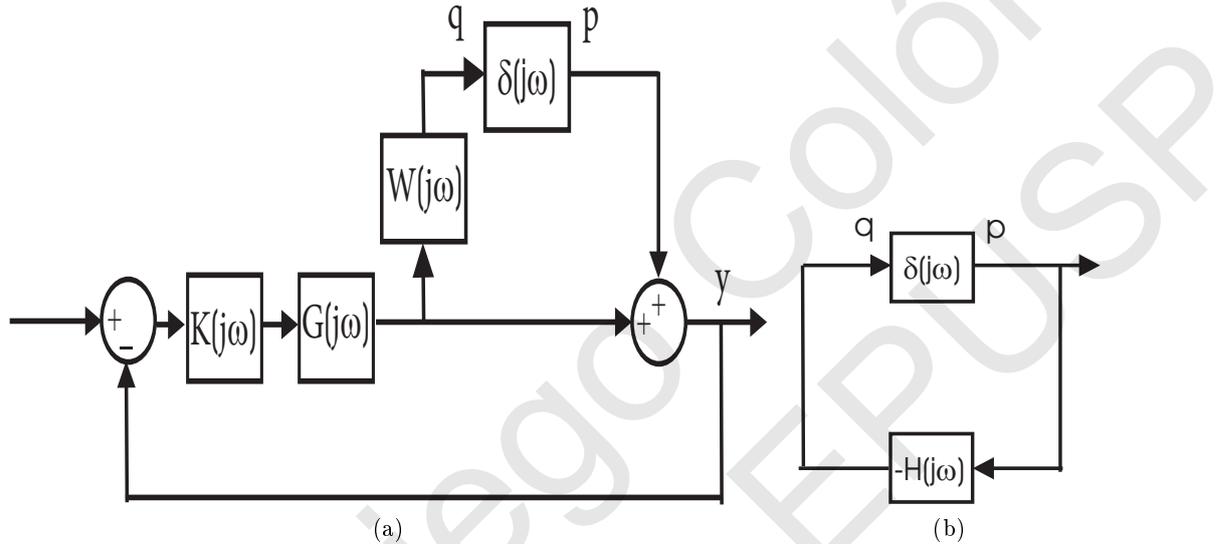


Figura 5.3: (a) Sistema em MF com incertezas multiplicativas (b) Sistema simplificado.

**Exemplo:** [Incerteza no Ganho] Se uma família de funções de transferência é dada por:

$$G_p(s) = k_p G_0(s)$$

onde  $k_p \in [k_{\min}, k_{\max}]$  é um parâmetro incerto e  $G_0(s)$  é uma função de transferência sem incertezas, então podemos escrever:

$$k_p = \bar{k}(1 + r_k \delta), \text{ onde } \bar{k} = \frac{k_{\min} + k_{\max}}{2}, r_k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2\bar{k}}, |\delta| \leq 1$$

Deste modo, tem-se que:

$$G_p(s) = \underbrace{\bar{k}G_0(s)}_{G(s)} \left(1 + \underbrace{r_k}_{W(j\omega)} \delta\right)$$

onde  $G(s)$  é uma função de transferência conhecida (nominal).

**Exemplo:** [Incerteza em Zero] Seja uma planta com incerteza em um zero, do tipo:  $G_p(s) = (1 + \tau_1 s)G_0(s)$ , onde  $\tau_1 = \bar{\tau}_1(1 + r_\tau \delta)$  é um parâmetro incerto e  $G_0(s)$  é uma função de transferência conhecida. Deste modo:

$$G_p(s) = [1 + \bar{\tau}_1(1 + r_\tau \delta)s]G_0(s) = \underbrace{G_0(s)(1 + \bar{\tau}_1 s)}_{G(s)} \left[1 + \underbrace{\frac{\bar{\tau}_1 r_\tau s}{1 + \bar{\tau}_1 s}}_{W(s)} \delta\right]$$

### 5.3.2 Modelo de Perturbações Multiplicativas Inversas

Fazendo-se o mesmo para o sistema na Fig. 5.4a, obtem-se:

$$\frac{q}{p} = -\frac{W}{1+L} = -WS = -H(j\omega)$$

como pode ser observado na Fig. 5.4b, o que implica que, pelo critério de estabilidade de Nyquist, que  $|W(j\omega)S(j\omega)| < 1$ . Deste modo, para se ter robustez de estabilidade é necessário e suficiente que  $|S(j\omega)| < 1/|W(j\omega)|$ . Se  $\|SW\|_\infty < 1$ , teremos que a condição anterior é automaticamente satisfeita.

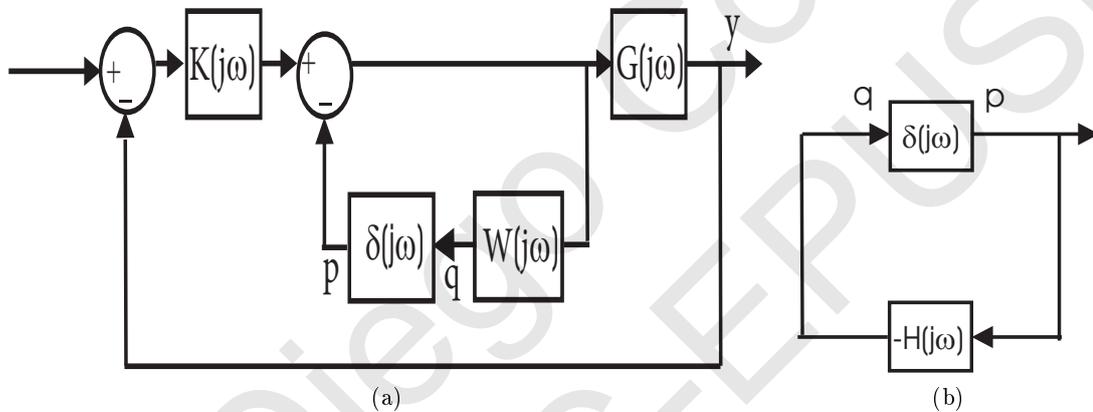


Figura 5.4: (a) Sistema em MF com incertezas multiplicativas inversa (b) Sistema simplificado.

**Exemplo:** [Incerteza em Polo] Seja uma família de plantas tal que:

$$G_p(s) = \frac{1}{\tau_p s + 1} G_0(s), \text{ onde } \tau_p \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$$

e tal que  $\tau_{\min} > 0$ . Podemos escrever  $\tau_p = \bar{\tau}_p(1 + r_\tau \delta)$ . Deste modo, após algumas manipulações, chega-se a:

$$G_p(s) = \underbrace{\frac{G_0(s)}{1 + \bar{\tau}_p s}}_{G(s)} \left[ \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\bar{\tau}_1 r_\tau s}{1 + \bar{\tau}_1 s}}_{W(s)} \delta} \right]$$

## 5.4 Robustez de Desempenho

O desempenho é especificado sobre a planta nominal por  $|W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1$ . Entretanto, quando temos uma família de plantas, e queremos o mesmo desempenho para toda esta família, deveríamos ter  $|W_p(j\omega)S_p(j\omega)| < 1$ , onde  $S_p$  é a função sensibilidade para cada planta possível da família. Deste modo, podemos escrever que:

$$|W_p(j\omega)| < |1 + L_p(j\omega)|$$

onde  $L_p = KG_p = KG(1 + W\delta)$ . Deste modo, tem-se:

$$|W_p(j\omega)| < |1 + KG(1 + W\delta)| = |1 + L| - |LW|$$

no pior caso. Conforme podemos ver na Fig. 5.5, para que tenhamos o mesmo desempenho para todas as plantas, é necessário e suficiente que:

$$|W_p(j\omega)| + |WL| < |1 + L|$$

de modo que teremos:

$$\frac{|W_p(j\omega)|}{|1 + L|} + \frac{|WL|}{|1 + L|} < 1$$

o que é equivalente a:

$$|W_p S| + |WT| < 1 \Leftrightarrow \max_{\omega} (|W_p S| + |WT|) < 1$$

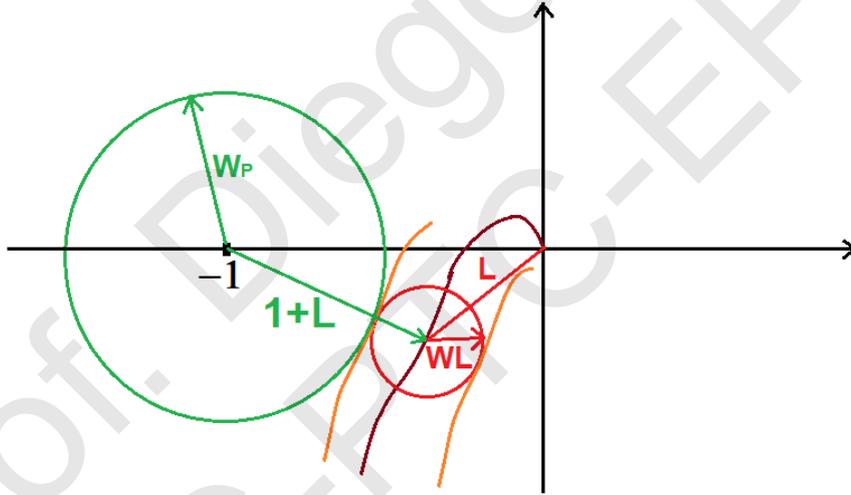


Figura 5.5: Função Peso de Erro

Como veremos mais adiante, dado um vetor complexo  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ , temos que  $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| < \sqrt{2}\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}$ . Deste modo, se definirmos a matriz:

$$N_2 = \begin{bmatrix} W_p S \\ WT \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

teremos que:

$$\|N_2\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p S|^2 + |WT|^2} < 1 \Rightarrow \max_{\omega} (|W_p S| + |WT|) < \sqrt{2} \quad (5.2)$$

o que garante que  $|W_p S| < 1$  e  $|WT| < 1$ . Se garantirmos ainda que  $\|N_2\|_{\infty} < 1/\sqrt{2}$ , teremos robustez de desempenho. Como consequência, ainda teremos:

1.  $|W_p S| < 1$ , o que significa que teremos o desempenho para o sistema nominal me malha fechada garantido.
2.  $|WT| < 1$ , o que significa que teremos robustez de estabilidade, de forma que quando temos robustez de desempenho, sempre teremos robustez de estabilidade.
3. É importante notar que ter robustez de estabilidade e desempenho nominal não significa que teremos robustez de desempenho. Entretanto, com pequenas modificações nas funções peso, pode-se obter sem grandes problemas  $|W_p S| < 0.5$  e  $|WT| < 0.5$ , o que garantiria robustez de desempenho para sistemas SISO (infelizmente, para MIMO o problema é bem mais complexo).
4. É também importante notar que tudo isso foi feito supondo somente um controlador  $K(s)$ , ou seja, um único controlador tem que ser projetado para garantir todas estas condições. É evidente que conseguir robustez de desempenho é mais difícil do que conseguir robustez de estabilidade.

## 5.5 Planta Estendida

Na especificação de desempenho, podemos pensar que  $W_p S$  é uma função de transferência que relaciona o erro com um sinal  $z_1$ , conhecido como *saída de desempenho*, que nada mais é que o erro filtrado por  $W_p$ , ou seja  $z_1 = W_p S d$  (vide Eq. (4.1)). De forma semelhante, podemos definir uma saída de desempenho  $z_2$  tal que é dada por  $z_2 = -W_u K S d$ .

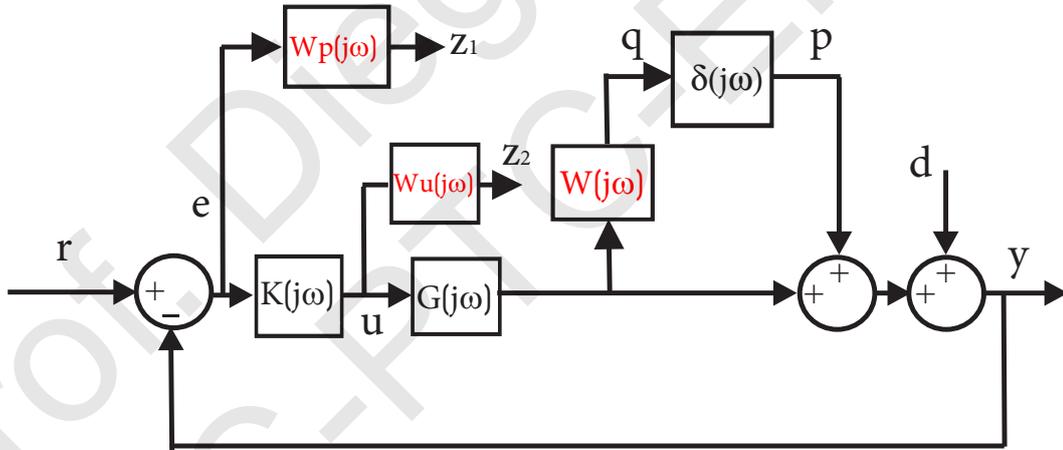


Figura 5.6: Sistema em MF com Funções Peso: Planta Estendida

Nosso objetivo aqui é colocar o sistema da Fig. 5.6 na forma da planta estendida, como na Fig. 5.7. Para tanto, temos que determinar a matriz de funções de transferência  $P(s)$  através da retirada estratégica das funções de transferência  $\delta(j\omega)$  e  $K(j\omega)$ , conforme apresentado na Fig. 5.8.

É fácil ver que a matriz de funções de transferência  $P(s)$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} q \\ z_1 \\ z_2 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WGu \\ W_p(r - d - p - Gu) \\ W_u u \\ r - (d + p + Gu) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & WG \\ -W_p & -W_p & W_p & -W_p G \\ 0 & 0 & 0 & W_u \\ -I & -I & I & -G \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} p \\ d \\ r \\ u \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

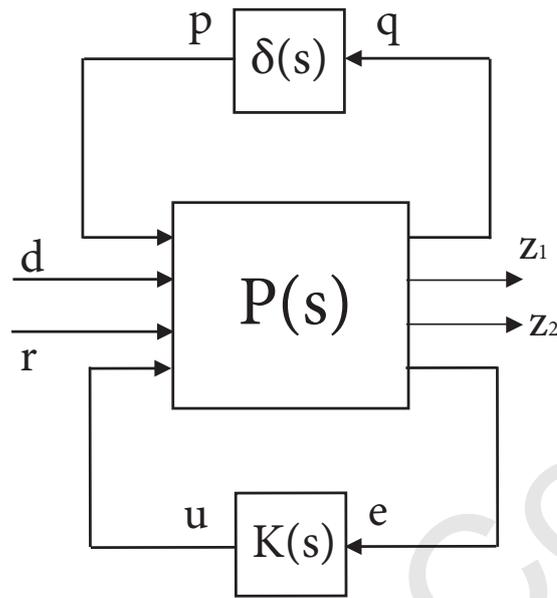


Figura 5.7: Forma Padrão da Planta Estendida

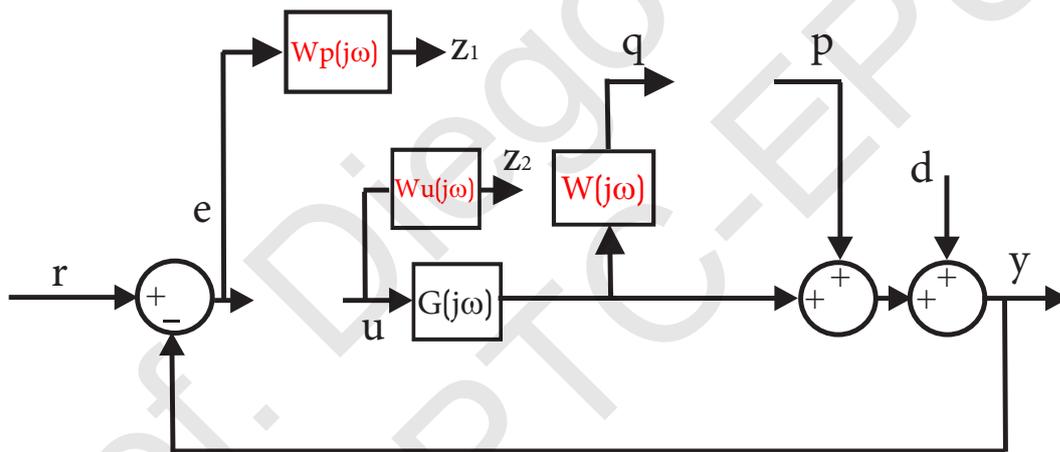


Figura 5.8: Determinação da Planta Estendida

## 5.6 Problema $S/T/KS$

Se queremos projetar um controlador tal que se tenha robustez de estabilidade, robustez de desempenho e ainda pondere valores elevados de esforço de controle, podemos definir o seguinte problema de otimização: Dada a matriz de funções de transferência:

$$N_3 = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \\ W T \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

a norma  $H_\infty$  é dada por:

$$\|N_3\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p S|^2 + |W_u K S|^2 + |W T|^2} < 1 \Rightarrow \max_{\omega} (|W_p S| + |W_u K S| + |W T|) < 1 \quad (5.5)$$

de modo que se garantirmos que  $\|N_3\|_\infty < 1$ , teremos as especificações satisfeitas, bem como robustez de estabilidade e desempenho. Como estamos buscando soluções subótimas, tal que  $\|N_3\|_\infty < \gamma$ , e quanto mais próximo  $\gamma$  for do valor um, melhor. Nesta situação, tem-se que

$$|S(j\omega)| < \gamma/|W_p(\omega)|$$

e

$$|KS(j\omega)| < \gamma/|W_u(\omega)|$$

e

$$|T(j\omega)| < \gamma/|W(\omega)|$$

É evidente que se tivermos  $\gamma > 1$  não dá para garantir a priori que teremos robustez de estabilidade e desempenho.

## 5.7 Equivalência Entre Robustez de Desempenho e Robustez de Estabilidade

A pior classe de distúrbios que pode haver é aquela que causa uma saída  $y$  que cresce sem parar. Isto aconteceria se o distúrbio estivesse de alguma forma relacionada com o erro filtrado  $z$ . Podemos então dizer que nesta situação há uma função de transferência  $\delta_2$ , com  $\|\delta_2\|_\infty \leq 1$ , de modo que  $d = \delta_2 z$ , que daria o atraso de fase, conforme pode ser visto na Fig. 5.9.

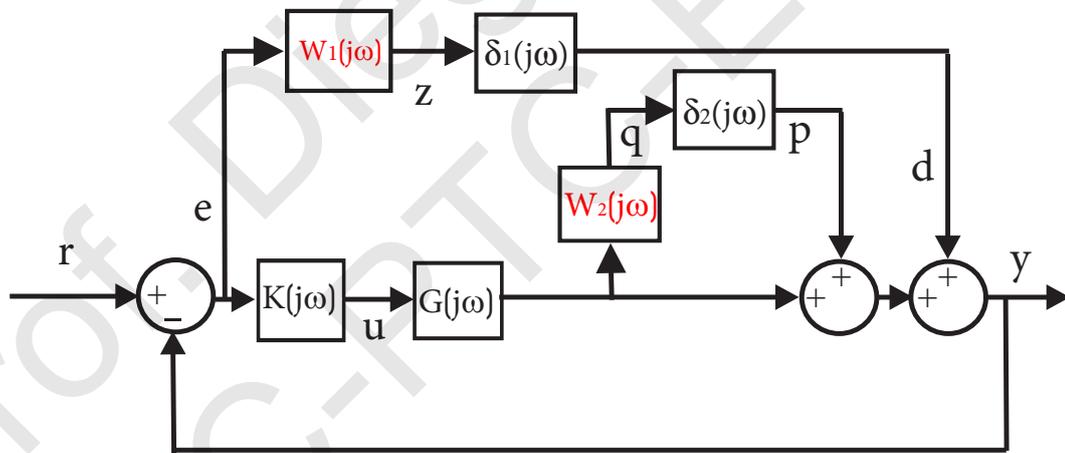


Figura 5.9: Distúrbio que causa Instabilidade

Como  $z = W_1 e = W_1(r - y) = W_1 r - W_1 L(1 + \delta_2 W_2) e + W_1 d$ , tem-se que após alguns cálculos, chega-se a:

$$z = W_1 r - L(1 + \delta_2 W_2) z + W_1 \delta_1 z$$

De certa forma, isto fecha abstratamente uma segunda malha no sistema, e após algum trabalho, teríamos a seguinte equação em MF:

$$z[1 + L + \delta_2 L W_2 - W_1 \delta_1] = W_1 r. \quad (5.6)$$

onde podemos ver que temos a função de transferência de  $r$  para  $z$  (no caso de não haver perturbações  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , recuperaríamos a função sensibilidade). Deste modo, a parte que

multiplica  $z$  do lado esquerdo é a equação característica, e pelo Critério de Estabilidade de Nyquist, temos que a condição necessária e suficiente para estabilidade é:

$$|1 + L + \delta_2 L W_2 - W_1 \delta_1| > 0$$

para cada  $\omega$ . O pior caso ocorre quando os vetores  $1 + L$  e  $\delta_2 L W_2 - W_1 \delta_1$  estão em direções opostas e  $|\delta_1| = |\delta_2| = 1$ , o que significa que:

$$|1 + L| - |L W_2| - |W_1| > 0$$

o que após algumas manipulações, conduz a:

$$|W_1 S| + |W_2 T| < 1$$

para cada  $\omega$ , o que já vimos que é a condição de robustez de desempenho para sistemas SISO.

# Referências Bibliográficas

- [dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the  $\mu$ -analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.

[ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.

Prof. Diego Colón  
LAC-PTC-EPUSP