Controle H_∞ - Aula 5

Prof. Diego Colón

13 de outubro de 2020

Família de Plantas 1

Vimos que alguns sinais, como o distúrbio $d(t)$ e o ruído/erro de medida $n(t)$ que estão presentes em um sistema de controle em malha fechada, além de serem incertos, causam efeitos indesejáveis. Entretanto, eles não afetam a estabilidade do sistema em malha fechada. De fato, robustez de estabilidade tem a ver com incertezas no modelo da planta $G(s)$ e não com os sinais $d(t)$, $n(t)$. Até agora, procuramos dar robustez de estabilidade ao sistema em malha fechada alterando diretamente a chamada função sensibilidade S (mais especificamente, fazendo com que $\|S\|_\infty$ fosse pequeno o suficiente).

Família de Plantas 2

Quando podemos quantificar as incertezas de um modelo, é possível trabalhar com *famílias de plantas*, que é uma família contínua e bem delimitada de funções de transferência. As incertezas no modelo normalmente são:

1. **incertezas paramétricas**: alguns ou todos os parâmetros das funções de transferência possuem incertezas na forma de um intervalo de valores possíveis;
2. **dinâmica não-modelada**: neste caso, as incertezas se apresentam na própria estrutura das funções de transferência, como polos e zeros desconhecidos e até mesmo atrasos de transporte.
3. **não-linearidades**: como por exemplo não-linearidades estáticas no problema de estabilidade absoluta ou problema de Lurie.

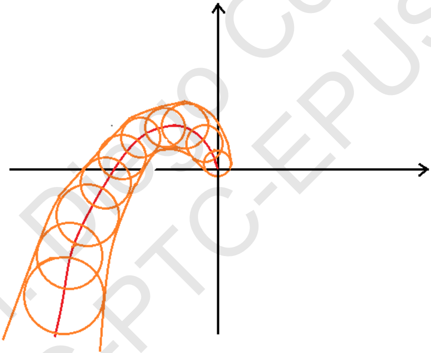
Família de Plantas 3

- Para cada combinação possível de valores de parâmetros, existe uma planta possível que é membro da família de plantas.
- Todos os membros da mesma família têm o mesmo número de pólos e zeros.
- Já para o caso de dinâmica não-modelada, os diferentes membros da família podem ter números diferentes de polos e zeros.
- Família é representada pela suas respostas em frequência, que podem representar sistemas até de ordem infinita, como sistemas com atraso.

Família de Plantas 4

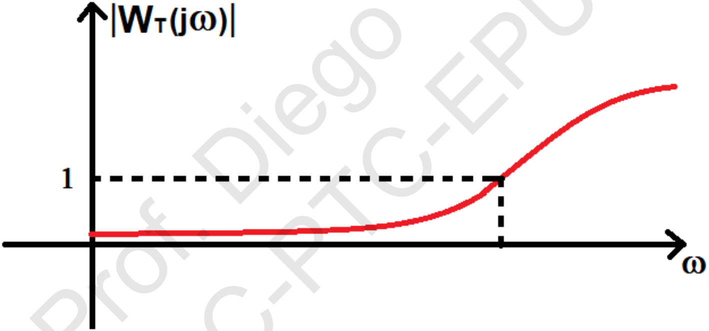
- Podemos ainda incluir as não-linearidades como incertezas desde que estas possam ser colocadas na forma de não-linearidades estáticas delimitadas em um setor, como acontece com o *problema da estabilidade absoluta* ou *problema de Lurie*
- **Robustez de Estabilidade**, que é portanto a capacidade do sistema de controle manter a estabilidade em malha fechada para toda a família de plantas,
- *Robustez de Desempenho*, que a capacidade do sistema de manter o mesmo desempenho para toda a família de plantas.
- A robustez é uma propriedade do sistema em malha fechada, mas quem obviamente confere esta característica é o controlador por realimentação projetado.

Uma típica família de plantas é apresentada na figura abaixo.



- A curva vermelha representa a planta nominal.
- Em torno de cada ponto desta curva, pode-se traçar uma circunferência (marcadas em laranja) que representa a incerteza da planta naquela frequência.
- Para a frequência ω temos uma circunferência de centro em $G(j\omega)$ e de raio igual a $|W_T(j\omega)G(j\omega)|$
- $W_T(j\omega)$ é uma função de transferência que representa o erro máximo que pode haver na planta para cada ω.

$|W_T(j\omega)|$ aumenta com essa variável, como pode ser visto na figura abaixo:



Qualquer ponto dentro da circunferência pode então ser representado por:

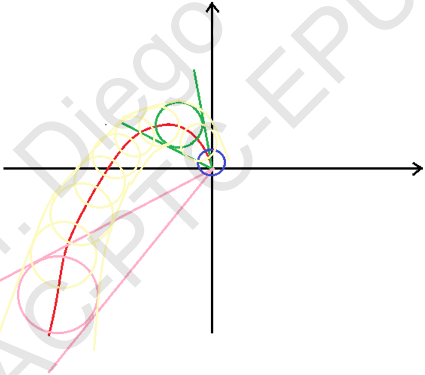
$$G_P(j\omega) = G(j\omega) + W_T(j\omega)\delta(j\omega)G(j\omega) = G(j\omega)(1 + W_T(j\omega)\delta(j\omega))$$

onde $\delta(j\omega)$ é uma função de transferência estável com $|\delta(j\omega)| \leq 1$ conhecida como *perturbação*.

Família de Plantas 9

- O contorno determinado pelas circunferências representa os limites da família de plantas.
- A incerteza de fase em cada frequência pode ser determinada passando-se duas retas partindo da origem e tangenciando as circunferências.
- O ângulo entre as duas retas representa a incerteza de fase.

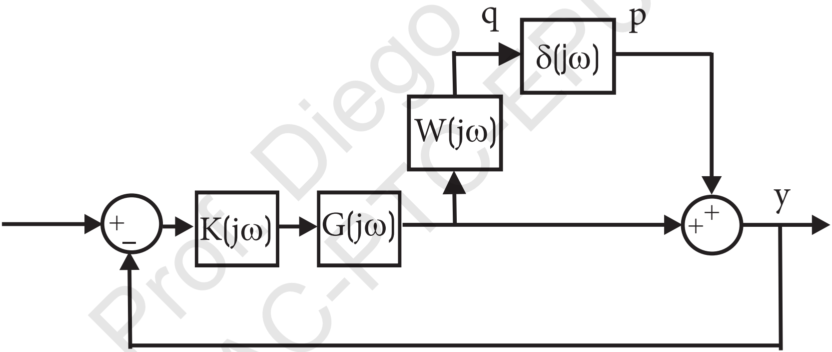
Na circunferência rosa, que corresponde a uma frequência mais baixa, a incerteza de fase é menor do que no caso da circunferência verde. No caso da circunferência azul, vê-se que ela envolve a origem, o que significa que a incerteza na fase é total.



Por fim, costuma-se supor que $W_T(j\omega)$ e $\delta(j\omega)$ são estáveis, o que singifica dizer que o número P (número de polos de malha aberta no semiplano direito) é sempre o mesmo para qualquer família de plantas.

Robustez de Estabilidade 1

O modelo do sistema em malha fechada com incertezas multiplicativas, ou seja, com perturbação $\delta(j\omega)$ é apresentado na figura abaixo.

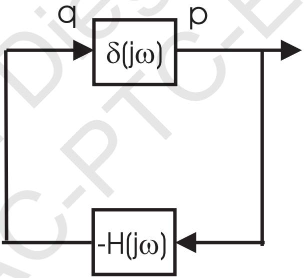


Robustez de Estabilidade 2

Se fizermos $\delta(j\omega) \equiv 0$ (o que é equivalente a abrir a malha), podemos determinar a função de transferência em "malha aberta":

$$\frac{q}{p} = -\frac{WL}{1+L} = -WT = -H(j\omega)$$

de modo que o sistema fica como apresentado na abaixo:



Robustez de Estabilidade 3

- Tudo se passa como se tivéssemos um novo sistema em malha fechada onde $\delta(j\omega)$ é a função de transferência de ramo direto, $H(j\omega)$ é a função de transferência de realimentação
- Podemos aplicar o critério de Nyquist, onde a função de transferência de malha aberta fica $\delta(j\omega)H(j\omega)$:
  1. Como $W(j\omega)$, $\delta(j\omega)$ e $T(j\omega)$ são estáveis, então $P = 0$ para qualquer $\delta(j\omega)$.
  2. Como para qualquer $\delta(j\omega)$ o sistema em malha fechada deve ser estável, então $Z = 0$.
  3. Deste modo, deveremos ter $N = 0$, o que significa que o gráfico de Nyquist de $1 + \delta(j\omega)H(j\omega) \neq 0$ para qualquer $\delta(j\omega)$.

Robustez de Estabilidade 4

- O que é possível somente se $|1 + \delta(j\omega)H(j\omega)| > 0$.
- Como se tratam de números complexos, a pior situação ocorre quando $1 - |\delta(j\omega)H(j\omega)| > 0$,
- Como $|\delta(j\omega)| \leq 1$, a pior situação ocorre para $|\delta(j\omega)| = 1$, o que significa dizer que $|H(j\omega)| = |W(j\omega)T(j\omega)| < 1$ para qualquer frequência
- Então $|T(j\omega)| < 1/|W(j\omega)|$, que é a condição de robustez de estabilidade.
- Por fim, esta condição também será satisfeita se impusermos $\|WT\|_\infty < 1$.

Exemplo: [Incerteza no Ganho] Se uma família de funções de transferência é dada por:

$$G_p(s) = k_p G_0(s)$$

onde $k_p \in [k_{\min}, k_{\max}]$ é um parâmetro incerto e $G_0(s)$ é uma função de tranferência sem incertezas, então podemos escrever:

$$k_p = \bar{k}(1+r_k\delta), \text{ onde } \bar{k} = \frac{k_{\min}+k_{\max}}{2}, r_k = \frac{k_{\max}-k_{\min}}{2\bar{k}} \;, \; |\delta| \leq 1$$

Deste modo, tem-se que:

$$G_p(s) = \underbrace{\bar{k}G_0(s)}_{G(s)}(1 + \underbrace{r_k}_{W(j\omega)} \delta)$$

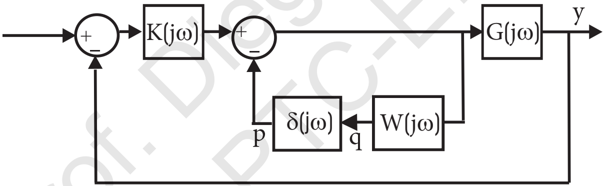
onde $G(s)$ é uma função de transferência conhecida (nominal).

Robustez de Estabilidade 6

Exemplo: [Incerteza em Zero] Seja uma planta com incerteza em um zero, do tipo: $G_p(s) = (1 + \tau_1 s)G_0(s)$, onde $\tau_1 = \bar{\tau}_1(1 + r_\tau \delta)$ é um parâmetro incerto e $G_0(s)$ é uma função de transferência conhecida. Deste modo:

$$G_p(s) = [1 + \bar{\tau}_1(1 + r_\tau \delta)sG_0(s)] = \underbrace{G_0(s)(1 + \bar{\tau}_1 s)}_{G(s)}[1 + \underbrace{\frac{\bar{\tau}_1 r_\tau s}{1 + \bar{\tau}_1 s}}_{W(s)}\delta]$$

O Modelo do sistema em malha fechada com incertezas multiplicativas inversas é apresentado na figura abaixo:



Fazendo-se o mesmo para o sistema anterior, obtem-se:

$$\frac{q}{p} = -\frac{W}{1+L} = -WS = -H(j\omega)$$

como pode ser observado na figura no slide Robustez de Estabilidade 2, o que implica que, pelo critério de estabilidade de Nyquist, que $|W(j\omega)S(j\omega)| < 1$. Deste modo, para se ter robustez de estabilidade é necessário e suficiente que $|S(j\omega)| < 1/|W(j\omega)|$. Se $\|SW\|_\infty < 1$, teremos que a condição anterior é automaticamente satisfeita.

Exemplo: [Incerteza em Polo] Seja uma família de plantas tal que:

$$G_p(s) = \frac{1}{\tau_p s + 1} G_0(s), \text{onde } \tau_p \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$$

e tal que $\tau_{\min > 0}$. Podemos escrever $\tau_p = \bar{\tau}_p(1 + r_\tau \delta)$. Deste modo, após algumas manipulações, chega-se a:

$$G_p(s) = \underbrace{\frac{G_0(s)}{1 + \bar{\tau}_p s}}_{G(s)} [\frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\bar{\tau}_p r_\tau s}{1 + \bar{\tau}_p s}}_{W(s)} \delta}]$$

Robustez de Desempenho 1

- O desempenho é especificado sobre a planta nominal por $|W_p(j\omega)S(j\omega)| < 1$.
- Quando temos uma família de plantas, e queremos o mesmo desempenho para toda esta família, deveríamos ter $|W_p(j\omega)S_p(j\omega)| < 1$, onde S_p é a função sensibilidade para cada planta possível da família.
- Deste modo, podemos escrever que:

$$|W_p(j\omega)| < |1 + L_p(j\omega)|$$

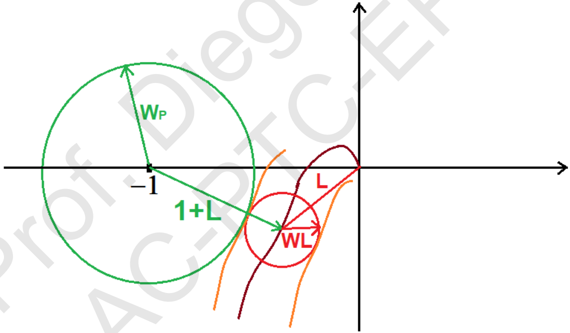
onde $L_p = KG_p = KG(1 + W\delta)$, de modo que:

$$|W_p(j\omega)| < |1 + L + LW\delta)| = |1 + L| - |LW|$$

que é a situação de pior caso.

Conforme podemos ver na figura abaixo, Para que tenhamos o mesmo desempenho para todas as plantas, é necessário e suficiente que:

$$|W_p(j\omega)| + |WL| < |1 + L|$$



De modo que teremos:

$$\frac{|W_p(j\omega)|}{|1+L|} + \frac{|WL|}{|1+L|} < 1$$

o que é equivalente a:

$$|W_pS| + |WT| < 1 \Leftrightarrow \max_{\omega}(|W_pS| + |WT|) < 1$$

Para um vetor complexo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$, temos que
$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| < \sqrt{2}\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}$.

Deste modo, se definirmos a matriz:

$$N_2 = \begin{bmatrix} W_p S \\ WT \end{bmatrix}, \tag{1}$$

teremos que:

$$\|N_2\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p S|^2 + |WT|^2} < 1 \Rightarrow \max_{\omega}(|W_p S| + |WT|) < \sqrt{2} \tag{2}$$

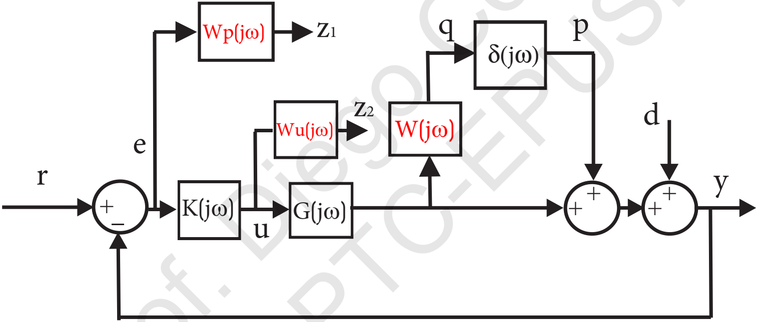
Robustez de Desempenho 5

Se garantirmos ainda que $\|N_2\|_\infty < 1/\sqrt{2}$, teremos robustez de desempenho. Como consequência, ainda teremos:

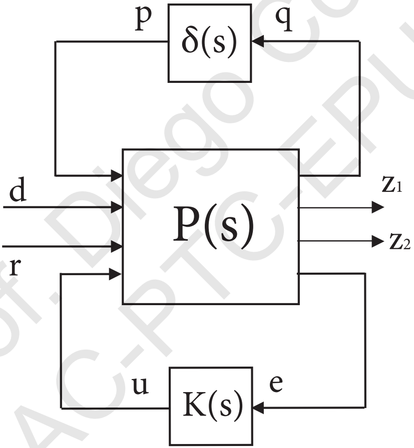
1. $|W_p S| < 1$, o que significa desempenho nominal em malha fechada garantido.
2. $|WT| < 1$, o que significa que teremos robustez de estabilidade.
3. Ter robustez de estabilidade e desempenho nominal não significa que teremos robustez de desempenho. Entretanto, com pequenas modificações nas funções peso, pode-se obter sem grandes problemas $|W_p S| < 0.5$ e $|WT| < 0.5$, o que garantiria robustez de desempenho para sistemas SISO
4. Tudo isso foi feito supondo somente um controlador $K(s)$, ou seja, um único controlador tem que ser projetado para garantir todas estas condições.

- Na especificação de desempenho, podemos pensar que $W_p S$ é uma função de transferência que relaciona o erro com um sinal z_1, conhecido como *saída de desempenho*,
- De forma semelhante, podemos definir uma saída de desempenho z_2 tal que é dada por $z_2 = -W_u KSd$.
- Da mesma forma, podemos pensar que q é uma saída ponderada por um peso W.

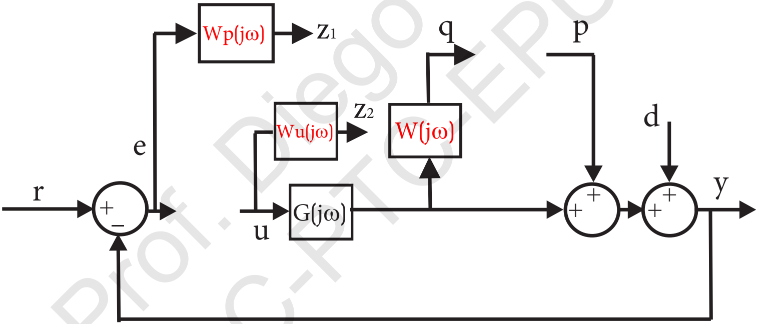
Planta Estendida 2



O objetivo é colocar o sistema da figura anterior na forma da planta estendida, como na abaixo.



Para tanto, temos que determinar a matriz de funções de transferência $P(s)$ através da retirada estratégica das funções de transferência $\delta(j\omega)$ e $K(j\omega)$:



É facil ver que a matriz de funções de transferência $P(s)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} q \\ z_1 \\ z_2 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WGu \\ W_p(r-d-p-Gu) \\ W_u u \\ r-(d+p+Gu) \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & WG \\ -W_p & -W_p & W_p & -W_pG \\ 0 & 0 & 0 & W_u \\ -I & -I & I & -G \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} p \\ d \\ r \\ u \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Problema $S/T/KS$ 1

Se queremos projetar um controlador tal que se tenha robustez de estabilidade, robustez de desempenho e ainda pondere valores elevados de esforço de controle, podemos definir o seguinte problema de otimizaçao: Dada a matriz de funções de transferência:

$$N_3 = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \\ WT \end{bmatrix}, \tag{4}$$

a norma H_∞ é dada por:

$$\|N_3\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p S|^2 + |W_u KS|^2 + |WT|^2} < 1 \Rightarrow$$
$$\max_{\omega}(|W_p S| + |W_u KS| + |WT|) < 1 \tag{5}$$

de modo que se garantirmos que $\|N_3\|_\infty < 1$, teremos as especificações satisfeitas, bem como robustez de estabilidade e desempenho.

Problema $S/T/KS$ 2

Como estamos buscando soluções subótimas, tal que $\|N_3\|_\infty < \gamma$, e quanto mais próximo γ for do valor um, melhor. Nesta situação, tem-se que

$$|S(j\omega)| < \gamma/|W_p(\omega))|$$

e

$$|KS(j\omega)| < \gamma/|W_u(\omega))|$$

e

$$|T(j\omega)| < \gamma/|W(\omega))|$$

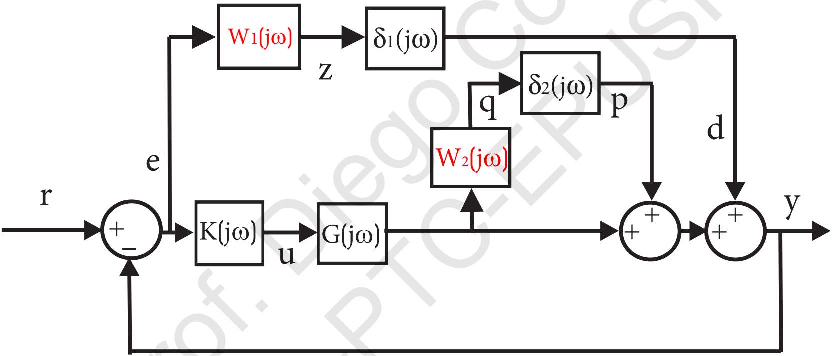
Problema $S/T/KS$ 3

É evidente que se tivermos $\gamma > 1$ não da para garantir a priori que teremos robustez de estabilidade e desempenho.

Relação Entre Robustez de Desempenho e Estabilidade 1

- A pior classe de distúrbios que pode haver é aquela que causa uma saída y que cresce sem parar.
- Isto aconteceria se o distúrbio estivesse de alguma forma relacionada com o erro filtrado z.
- Nesta situação há uma função de transferência δ_2, com $\|\delta_2\|_\infty \leq 1$, de modo que $\mathrm{d} = \delta_2 z$, que daria o atraso de fase, conforme pode ser visto na figura do próximo slide

Relação Entre Robustez de Desempenho e Estabilidade 2



Relação Entre Robustez de Desempenho e Estabilidade 3

Como $z = W_1 e = W_1(r - y) = W_1 r - W_1 L(1 + \delta_2 W_2)e + W_1 d$, tem-se que após alguns cálculos, chega-se a:

$$z = W_1 r - L(1 + \delta_2 W_2)z + W_1 \delta_1 z$$

De certa forma, isto fecha abstratamente uma segunda malha no sistema, e após algum trabalho, teríamos a seguinte equação em MF:

$$z[1 + L + \delta_2 L W_2 - W_1 \delta_1] = W_1 r. \tag{6}$$

onde podemos ver que temos a função de transferência de r para z (no caso de não haver perturbações δ_1 e δ_2, recuperaríamos a função sensibilidade).

Relação Entre Robustez de Desempenho e Estabilidade 4

A parte que multiplica z do lado esquerdo é a equação característica, e pelo Critério de Estabilidade de Nyquist, temos que a condição necessária e suficiente para estabilidade é:

$$|1 + L + \delta_2 L W_2 - W_1 \delta_1| > 0$$

para cada ω. O pior caso ocorre quando os vetores $1 + L$ e $\delta_2 L W_2 - W_1 \delta_1$ estão em direções opostas e $|\delta_1| = |\delta_2| = 1$, o que significa que:

$$|1 + L| - |L W_2| - |W_1| > 0$$

que conduz a:

$$|W_1 S| + |W_2 T| < 1$$

para cada ω, o que já vimos que é a condição de robustez de desempenho para sistemas SISO.