SME-5720 e SME-0212 - Primeira Lista de Exercícios

13 de outubro de 2020

1

Denotemos $B_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \epsilon\}$. Um ponto $\boldsymbol{x}^*$ é dito *minimizador local* de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sujeita a $\boldsymbol{x} \in X$ quando existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in B_\epsilon(\boldsymbol{x}^*) \cap X$ tenhamos

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}).$$

Defina adequadamente *minimizador global*, e os conceitos correspondentes de *maximizador* local e global e prove que a tarefa de maximização pode ser reduzida à de minimização.

2

Prove que um minimizador $\boldsymbol{x}^*$ de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$.

3

Prove que se um ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaz, para uma função duas vezes diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ e possui $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ definida positiva, então $\boldsymbol{x}^*$ é minimizador local de f.

4

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* quando satisfaz:

$$f\big(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}\big) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$.

Prove que uma função convexa não pode possuir um minimizador local que não seja global.

5

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* quando satisfaz:

$$f\big(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}\big) < \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

para todo $\alpha \in (0,1)$.

Prove que uma função estritamente convexa não pode possuir mais de um minimizador.

6

Prove que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável é convexa se e somente se

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{z}) + \nabla f(\boldsymbol{z})^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})$$

para qualquer par $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$.

7

Dizemos que um conjunto C é convexo quando, para quaisquer $\boldsymbol{x} \in C$, $\boldsymbol{y} \in C$ e $\alpha \in [0,1]$, temos $\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in C$. Quais dos seguintes conjuntos são convexos e quais não são? Prove.

1. $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 3\}$;
2. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1,\ x_1 - 2x_3 \geq 2\}$;
3. $\{(x_1, x_2) : x_2 - 3x_1^2 = 0\}$;
4. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_2 \geq x_1^2,\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4\}$;
5. $\{(x_1, x_2) : x_1 = 3,\ |x_2| \leq 4\}$;
6. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = |x_2|,\ x_1 \geq 3\}$.

8

Considere o problema de minimizar $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ sujeito a $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ onde $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. Suponha que $\boldsymbol{x}^0$ é tal que $A\boldsymbol{x}^0 < \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{0}$. Prove que $\boldsymbol{x}^0$ não pode ser um minimizador do problema.

9

Dizemos que $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a partir de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ quando existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}).$$

Prove que se f é diferenciável em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$, então $\boldsymbol{d}$ é uma direção de descida.

10

Mais que isso, seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}) < 0$. Prove que para qualquer $\sigma \in [0,1)$ fixo, existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda]$ temos:

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}) + \sigma \lambda \boldsymbol{d}^T \nabla f(\boldsymbol{x}).$$

11

Considere a sequência $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ gerada por

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \lambda_k \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

onde λ_k é um minimizador de $g(\lambda) := f\big(\boldsymbol{x}^{(k)} - \lambda_k \nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})\big)$ restrita a $\lambda \in [0, \infty)$. Prove que quaisquer duas sucessivas direções tomadas pelo método são ortogonais.

12

Exercícios de revisão (a partir da página 8) do linvro da Ana Friedlander (selecione os interessantes, ou seja, os que você tem mais dúvidas).

13

Exercícios 2.1-2.9 do livro da Ana Friedlander.

14

Exercícios 4.2-4.6 do livro da Ana Friedlander.