DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

MECÂNICA (4310192) - 2020/2
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS 3

13 de outubro de 2020

Professor: Gustavo Paganini Canal
Monitor: Fábio Camilo de Souza

Questões Conceituais

1. Como a força é constante na direção $\hat{\boldsymbol{n}}$, o trabalho pode ser encontrado a partir do descocamento da partícula ($\vec{\boldsymbol{r}}_f - \vec{\boldsymbol{r}}_i$) multiplicado pela força $\vec{\boldsymbol{F}}_0 = F_0\hat{\boldsymbol{n}}$, independente do caminho percorrido.
Sendo $\hat{\boldsymbol{r}}$ o versor da direção que leva de a a b, temos:
Para o caminho $a \to b$, o deslocamento é dado por $\vec{\boldsymbol{r}}_b - \vec{\boldsymbol{r}}_a = |\vec{\boldsymbol{r}}_b - \vec{\boldsymbol{r}}_a|\hat{\boldsymbol{r}}$
Para o caminho $b \to a$, o deslocamento é dado por $\vec{\boldsymbol{r}}_b - \vec{\boldsymbol{r}}_a = -|\vec{\boldsymbol{r}}_b - \vec{\boldsymbol{r}}_a|\hat{\boldsymbol{r}}$
Como $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \cos\theta$, concluímos que a alternativa (a) está correta.

2. Dado que no início do movimento o módulo da velocidade de todas as partículas era idêntico (portanto mesma energia cinética), na linha tracejada todas tem a mesma energia potencial.
Aplicando o princípio da conservação da energia, como todas as partículas partiram com a mesma energia cinética e potencial, na linha tracejada possuem a mesma energia potencial, concluímos que o módulo da velocidade também será idêntico.
Portanto a alternativa *a* está correta.

3. Temos

$$U(x) = \beta[1 - e^{-\alpha x^2}]$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 2\alpha\beta x e^{-\alpha x^2}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 2\alpha\beta(1 - 2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2}$$

(a) Para equilíbrio estável, temos $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ e $\frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0$. Satisfeito apenas em $x = 0$. Portanto a afirmação é falsa.
(b) A força é dada por $F = -\frac{dU(x)}{dx} = -2\alpha\beta x e^{-\alpha x^2}$, que leva para $x = 0$ (positiva para $x < 0$ e negativa para $x > 0$), para qualquer x finito. Portanto a afirmação é falsa.
(c) Como se trata do ponto de mínimo da energia potencial, a partir do princípio de conservação de energia), teremos o valor máximo para a energia cinética. Portanto a afirmativa é verdadeira.
(d) Dado que $\frac{dU(x)}{dx} = 0$ e $\frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0$, a afirmativa é verdadeira.

Problemas

4. O trabalho de uma força $\vec{F}$ durante um um percurso descrito pela linha l, é dado por:

$$W_l = \int_l \vec{F} d\vec{r}$$

No percurso a, temos $d\vec{r} = \hat{i}dx$ e $y = 0$, portanto:

$$W_a = \int_0^1 A(xy\hat{i} + y^2\hat{j}).\hat{i}dx = 0$$

No percurso b, temos $d\vec{r} = \hat{j}dy$ e $x = 1$, portanto:

$$W_b = \int_0^1 A(1y\hat{i} + y^2\hat{j}).\hat{j}dy = \int_0^1 Ay^2 dy = \frac{A}{3}$$

No percurso c, temos $d\vec{r} = \hat{i}dx$ e $y = 1$, portanto:

$$W_b = \int_1^0 A(x1\hat{i} + 1^2\hat{j}).(-\hat{i})dx = \int_1^0 Axdx = -\frac{A}{2}$$

Portanto, pelo caminho 1:

$$W_1 = W_a + W_b + W_c = -\frac{A}{6}$$

Já pelo caminho 2, temos $d\vec{r} = \hat{j}dy$ e $x = 0$, portanto:

$$W_b = \int_0^1 A(0y\hat{i} + y^2\hat{j}).\hat{j}dy = \int_0^1 Ay^2 dy = \frac{A}{3}$$

5. a) Considerando o ponto mais baixo da trajetória como ponto com energia potencial nula, $U_b = 0$. A energia total do sistema é dada pela energia potencial no ponto de partida, dada por $E = U_i = mgL$.
No ponto mais baixo b, pelo princípio de conservação de energia, a energia cinética é responsável pela energia total, portanto:

$$E_{cb} = U_i$$

$$m\frac{v_b^2}{2} = mgL$$

$$v_b = \sqrt{2gL}$$

Com $L = 1,2\,\text{m}$, $g = 9,8\,\text{m/s}^2$, obtemos: $v_b = 4,8\,\text{m/s}$.

6. Como a tração é sempre perpendicular à trajetória, temos que o trabalho exercido pela tração é nulo,

$$W_T = 0$$

Como a força peso é constante, o trabalho exercido por ela não depende do caminho percorrido, dependendo apenas do deslocamento vertical do peso do pêndulo, sendo o deslocamento vertical dado por $h = L(1-\cos\theta_0)$, o módulo da força peso $P = -mg$ (vertical, para baixo), o trabalho exercido pela força peso é então

$$W_P = -mgL(1-\cos\theta_0)$$

Como a partícula é transportada com velocidade constante, indicando que não há variação da energia cinética, indica que a somatória dos trabalhos de todas as forças atuantes no corpo é nulo. Portanto, restando o trabalho correspondente para a força $\vec{F}$,

$$W_F = mgL(1-\cos\theta_0)$$

b) A energia total no instante em que o pêndulo é liberado é dada pela energia potencial gravitacional, $U_2 = mgh = mgL(1-\cos\theta_0)$, tomando energia potencial nula o ponto mais baixo da trajetória.
No retorno ao ponto 1, toda essa energia potencial se converte em energia cinética, $E_{c1} = U_2$, então:

$$m\frac{v_1^2}{2} = mgL(1-\cos\theta_0)$$

$$v_1 = \sqrt{2mgL(1-\cos\theta_0)}$$

7. a) A energia total inicial do sistema é dado pela energia potencial elástica da mola, comprimida uma distância d.

$$E_i = k\frac{d^2}{2}$$

A força de atrito no percurso é dada por $F_{at} = \mu N$, na direção da rampa, em sentido contrário ao movimento, onde a normal, equiparada à componente do peso perpendicular a superfície, vale $N = mg\cos\theta$.
A energia total no ponto f é dada apenas pela energia potencial gravitacional do bloco, após percorrer uma distância x na rampa:

$$E_f = mgx\sin\theta,$$

onde $x\sin\theta$ é a altura do ponto f.
O trabalho exercido nesse percurso pela força de atrito $W_{at} = F_{at}x$, é equivalente á energia dissipada no sistema, portanto:

$$E_i = E_f + W_{at}$$

$$k\frac{d^2}{2} = mgx\sin\theta + \mu mg\cos\theta x$$

Isolando x, após um pouco de álgebra, chegamos a:

$$x = \frac{k\frac{d^2}{2}}{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}$$

Substituindo pelos valores dados no exercício, obtemos $x = 2,2$ m.

b) Sendo o ponto médio entre i e j o ponto m. Neste novo percurso, dde f a m, a força de atrito irá novamente dissipar energia, como o percurso foi metade do anterior e sendo a força de atrito de módulo constante, a energia dissipada é equivalente a

$$W_{atm} = F_{at}\frac{x}{2}$$

No ponto m, a energia é dada pela energia potencial somada a energia cinética. A energia potencial é igual a metade na energia potencial no ponto f anterior,

$$U_m = \frac{x}{2}mg\sin\theta = \frac{E_f}{2}$$

já a energia cinética:

$$E_{cm} = m\frac{v_m^2}{2}$$

onde v_m é a velocidade pedida no exercício.

Aplicando o princípio da conservação da energia, a energia no ponto mais alto E_f será equivalente ao à soma da energia dissipa pelo atrito W_{atm} , a energia potencial U_m e energia cinética no ponto E_{cm}, podemos dizer que:

$$E_f = W_{atm} + U_m + E_{cm}$$

$$E_{cm} = \frac{E_f}{2} - W_{atm}$$

$$m\frac{v_m^2}{2} = mg\sin\theta\frac{x}{2} - \mu mg\cos\theta\frac{x}{2}$$

$$v_m = \sqrt{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)x}$$

$$v_m = \sqrt{(\sin\theta - \mu\cos\theta)\frac{k\frac{d^2}{2}}{m(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}$$

Substituindo pelos dados do exercício, obtemos, $v = 3,2$ m/s.

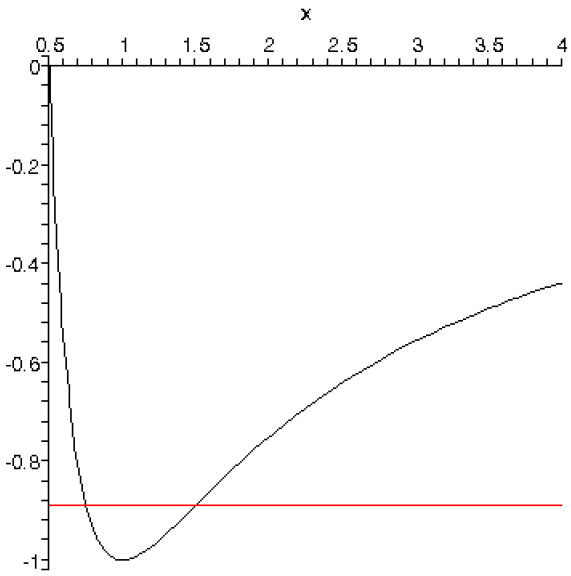
8. Temos:

$$U(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3}$$

a) Em $x = 0$, o gráfico tende a $U(x) \to +\infty$, cruza o 0 em $x = 1/2$, indo para 0 com $x \to +\infty$.
O mínimo ocorre em $\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x_{min} = 1$. Note que $(\frac{d^2U(x)}{dx^2}|_{x=1} > 0)$. Sendo a energia potencial mínima valendo $U(1) = -1$
O gráfico de $U(x) \times x$ é:



A linha vermelha será utilizada no ítem (d).

b)Considerando o movimento apenas no eixo x, a força é dada por:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$F = +\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}$$

c) O ponto de equilíbrio é encontrado quando a força é nula, ou seja, $x = 1$.

d) A energia potencial nesse ponto vale $U(0,75) = U(3/4) = -8/9$, como na linha vermelha do gráfico do ítem (a), o retorno se dá quando a partícula novamente encontrará a linha vermelha, basta solucionar $U(x) = -8/9$....

$$-\frac{8}{9} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

Que é solucionada no ponto de partida, 0,75 e no ponto de retorno, $x = 1,5\,\text{m}$.

e) A variação da energia potencial (que foi convertida em energia cinética no ponto de equilíbrio), é dada pela diferença entre a energia no ponto onde ela foi abandonada, $U(0,75) = -8/9$, e a energia no ponto de equilíbrio $U(1) = -1$, portanto, a energia cinética no ponto de equilíbrio é $E_c = U(0,75) - U(1) = 1/9$. Portanto:

$$m\frac{v^2}{2} = \frac{1}{9}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{9m}}$$

Com $m = 0.5$:

$$v = \frac{2}{3}$$