MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
Lista 2
2020

1. Determine um conjunto gerador para cada subespaço W do espaço vetorial V.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in V \mid x + 2y + z = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \mid AX = \mathbf{0}\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p \in V : p(1) = 0\}$.

   (d) $V = M_3(\mathbb{R})$ e $W = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$.

   (e) $V = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $W = \{M \in V \mid AM = MA\}$.

2. Verifique se o conjunto A gera o espaço vetorial V.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $A = \{(1, 2, 3), (1, -1, 1), (0, 3, 2)\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ e $A = \{(1, 2, 3), (1, -1, 1), (1, 3, 2)\}$.

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $A = \{1 + x + x^2 + x^3, x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1\}$.

   (d) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Seja $V = C(\mathbb{R})$. Mostre que $[\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t] = [1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t]$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Quais dos subconjuntos de V são LI ?

   (a) $A = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$

   (b) $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

   (c) $A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

   (d) $A = \{(1, -1, 1), (1, -1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, -1)\}$

5. Seja $V = P_3\mathbb{R}$. Quais dos subconjuntos de V são LI?

   (a) $\{1, t - 1, t^2 + 2t + 1, t^2\}$

   (b) $\{2t, t^2 + 1, t + 1, t^2 - 1\}$

   (c) $\{(t - 1)^2, t^2 - 1, t^4 - t^3, 2t + 1\}$

6. Seja $V = C(\mathbb{R})$. Mostre que $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ é LI.

7. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$. Mostre que:

   (a) $\{u, v\}$ é LI se, e somente se, $\{u + v, u - v\}$ é LI.

   (b) $\{u, v, w\}$ é LI se, e somente, $\{u + v, u + w, v + w\}$ é LI.

8. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. É verdade que $\{u, v, w\}$ é LI se, e somente se, os três subconjuntos $\{u, v\}$,$\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ são LI?

9. Determine $m, n \in \mathbb{R}$ para que os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ abaixo sejam LI.

   (a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$

   (b) $\{(1, 3, 5), (2, m + 1, 10)\}$

   (c) $\{(6, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$

10. Suponha que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto LI em um espaço vetorial V. Mostre que se k é tal que $1 \leq k \leq n$, então

$$[v_1, v_2, ..., v_k] \cap [v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n] = \{0\}.$$