PROPOSIÇÃO:

Sejam $S_1 = [u_1, \dots, u_n]$ e $S_2 = [v_1, \dots, v_m]$.

(1) Se $S_1 \subset [S_2]$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

(2) $[S_1] = [S_2] \Longleftrightarrow S_1 \subset [S_2]$ e $S_2 \subset [S_1]$.

NO EXEMPLO (1)

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

$x = -y - z$

Um vetor de W é

$(-y - z, y, z), \quad y, z \in \mathbb{R}$

$y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$

$W = [(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$

$W = [(+1, 0, -1), (0, 1, -1)]$

$(-1, 1, 0) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$

$= (a, b, -a - b)$

$a = -1$

$b = 1$

$-a - b = 0$

DEPENDÊNCIA LINEAR

$(V, +, \cdot)$ espaço vetorial

Sejam $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ e $S = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Considere a equação vetorial

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \dots + x_n v_n = \underset{\hookrightarrow \text{vetor}}{0} \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \end{array}} \quad (*)$$

Como $0v = 0 \quad \forall\, v \in V$, vemos que se tomarmos $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ então

$$\underset{\in \mathbb{R}}{0} v_1 + \underset{\in \mathbb{R}}{0} v_2 + \dots + \underset{\in \mathbb{R}}{0} v_n = \underset{\text{vetor}}{0}$$

Então $(*)$ tem <u>SEMPRE</u> a solução

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (SOLUÇÃO TRIVIAL)

DEF: Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, ---, v_n\} \subset V$ é LINEARMENTE INDEPENTE (ou simplesmente, que os vetores $v_1, ---, v_n \in V$ são linearmente independentes) se (*) tem APENAS a solução trivial.

Caso (*) tenha soluções NÃO triviais dizemos que S é LINEARMENTE DEPENDENTE (ou os vetores $v_1, ---, v_n$ são linearmente dependents.

Exemplos:

(1) $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1, 3, 2)$$
$$v_2 = (2, 1, 1)$$
$$v_3 = (1, 1, 0)$$

Vamos verificar se v_1, v_2, v_3 são LI ou LD.

Montamos então a equação vetorial

$$x_1(1,3,2) + x_2(2,1,1) + x_3(1,1,0) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(x_1 + 2x_2 + x_3,\ 3x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_2) = (0,0,0)$$

Temos então o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Temos que estudar esse sistema e ver se ele tem APENAS a solução trivial ou se tem soluções além da trivial.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L3 \Leftrightarrow \\ L3-2L1}]{\substack{L2 \Leftrightarrow \\ L2-3L1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3+3L2]{L2 = -\frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & -4/5 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o sistema tem APENAS a solução trivial

② $V = P_3(\mathbb{R})$

$f_1 = t - 1$

$f_2 = t^2 + t + 1$

$f_3 = t^3 + 2t$

$f_4 = t^3 + 2$

$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 0$ (→ pol. nulo)

$x_1(t-1) + x_2(t^2+t+1) + x_3(t^3+2t)$

$+ x_4(t^3+2) = 0$

$(x_3+x_4)t^3 + x_2 t^2 + (x_1+2x_3)t$

$+ (-x_1 + x_2 + 2x_4) = 0$

Caimos no sistema

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Podemos trocar a ordem das equações

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalonar a matriz A

$L2 \leftrightarrow L1 + L2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3 - L2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TEM SOL. NÃO TRIVIAIS LD

Seja V um espaço vetorial

(1) Se $S = \{v\}$ então S é LI $\Leftrightarrow v \neq 0$.

(2) Se $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ e algum $v_i = 0$, então S é LD.
(Todo conjunto que contém o vetor nulo é LD).

(3) Seja $S = \{u, v\} \subset V$. Mostre que S é LD se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = av$, ou existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $v = au$. (Isto é, um conjunto com 2 vetores é LD, se, e somente se, um dos vetores é múltiplo escalar do do outro.)

(4) Se $S \supset T$ e T é LD então S é LD.