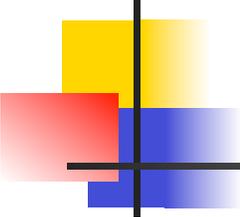


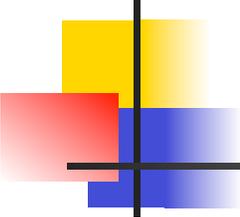
Finanças I

Modelo CAPM



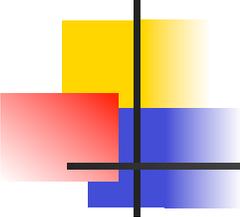
Modelo CAPM

- Objetivo: investigar a relação entre risco e retorno dos ativos, quando os mesmos tornam-se parte de uma carteira de investimentos:
 - Ativo: retorno esperado e o desvio padrão são medidas de retorno e risco do ativo;
 - Carteira de investimentos: contribuição de cada ativo ao retorno esperado e ao risco da mesma;
 - Retorno esperado é a medida apropriada da contribuição de um ativo específico ao retorno da carteira;
 - O mesmo não ocorre com o desvio padrão e a variância. A contribuição de um ativo específico ao risco da carteira é medida pelo beta.



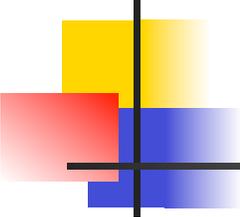
Modelo CAPM

- Análise individual: este é o caso em que o investidor está preocupado apenas com a aquisição de um único ativo em mercado;
- Medidas estatísticas relevantes:
 - Retorno esperado;
 - Variância e desvio padrão;
 - Covariância e correlação.



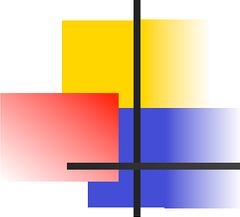
Modelo CAPM

- Retorno esperado: retorno que o investidor espera obter pela posse de um ativo no período de tempo futuro próximo;
- Variância e desvio padrão: tratam-se de medidas de volatilidade do retorno de um ativo;
- Covariância: medida estatística que afixere a relação entre dois ativos;
- Correlação: medida estatística alternativa de relação entre dois ativos, definida em termos dos desvios padrão dos mesmos.



Modelo CAPM

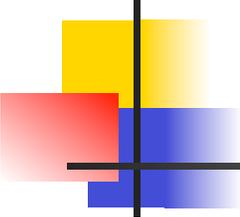
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Relação entre o retorno esperado do investimento em ativos individuais e o retorno esperado de uma carteira composta por esses ativos;
 - Relação entre os desvios padrão individuais, os respectivos coeficientes de correlação e o desvio padrão da carteira constituída pelos mesmos ativos.



Modelo CAPM

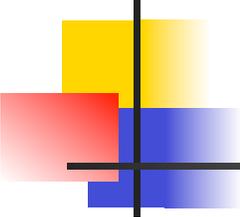
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - O retorno esperado de uma carteira de investimentos:
 - Por definição, o retorno esperado de uma carteira é a média ponderada dos retornos individuais esperados dos ativos que a constituem.

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N \bar{R}_i X_i$$



Modelo CAPM

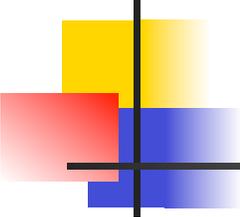
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - O retorno esperado de uma carteira de investimentos:
 - O retorno esperado de uma carteira não desaparece ou não é dissipado pela diversificação da mesma;
 - O retorno esperado de uma carteira de investimentos nada mais é do que uma média ponderada dos retornos marginais esperados de cada ativo inserido na mesma.



Modelo CAPM

- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Variância e desvio padrão de uma carteira:
 - A variância de uma carteira é definida pela seguinte relação, conhecida em estatística:

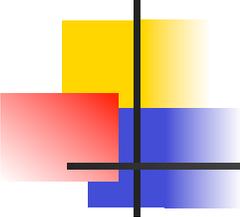
$$Var(p) = Var\left(\sum_{i=1}^N R_i X_i\right)$$



Modelo CAPM

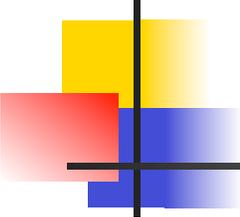
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Variância e desvio padrão de uma carteira:

$$Var(p) = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X_i X_j \sigma_{ij}$$



Modelo CAPM

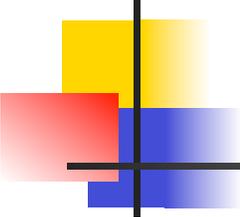
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Variância e desvio padrão de uma carteira:
 - A variância da carteira é composta pelas variâncias individuais dos ativos que constituem a carteira;
 - Além disso, depende também da covariância par-a-par entre dois ativos na carteira:
 - Se $\sigma_{ij} > 0$, a variância da carteira cresce;
 - Se $\sigma_{ij} < 0$, a variância da carteira decresce;
 - A segunda situação define o que chamamos em finanças de *hedge* ou imunização de carteiras de investimento.



Modelo CAPM

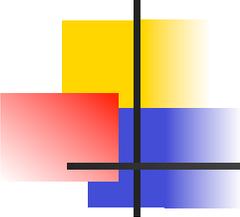
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Desvio padrão de uma carteira:

$$DP(p) = \sqrt{\sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X_i X_j \sigma_{ij}}$$



Modelo CAPM

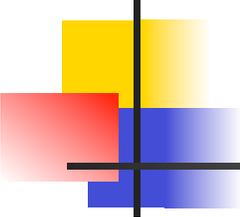
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Efeito diversificação:
 - O desvio padrão de uma carteira de investimento não corresponde à média ponderada dos desvios padrão dos ativos que a constituem;
 - Na verdade, o desvio padrão de uma carteira é sempre menor do que essa média ponderada;
 - A diversificação ou a existência de correlação entre os retornos esperados dos ativos na carteira é a responsável por esse efeito.



Modelo CAPM

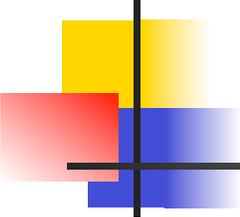
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Efeito diversificação:
 - Qual o valor da relação entre os ativos par-a-par para que os benefícios da diversificação desapareçam?
 - Para responder a essa questão, vamos modificar a expressão original da variância da carteira:

$$Var(p) = \sum_{i=1}^N X_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$



Modelo CAPM

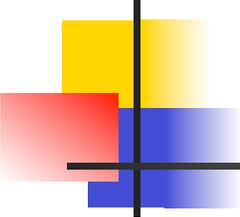
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Vamos admitir agora que $\rho_{i,j} = 1$, o valor mais elevado e possível que o coeficiente de correlação pode atingir;
 - Neste caso, as duas definições de desvio padrão são idênticas em valores calculados. Portanto, o desvio padrão de uma carteira é, no máximo, igual às somas ponderadas dos desvios padrão individuais.



Modelo CAPM

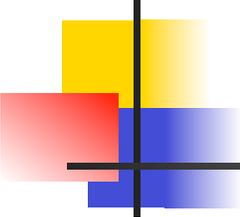
- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Se $\rho_{i,j} = 1$, as duas definições de desvio padrão são idênticas em resultado;
 - Logo, o efeito diversificação aplica-se a uma carteira de investimento em que o coeficiente de correlação entre os ativos estejam entre os máximos:

$$-1 < \rho_{i,j} < 1$$



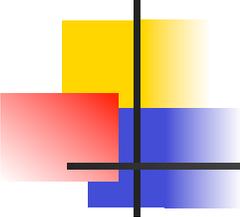
Modelo CAPM

- Retorno e risco calculado para carteiras de investimento:
 - Efeito diversificação:
 - Os resultados anteriores podem ser estendidos para o caso de uma carteira com muitos ativos;
 - Se $-1 < \rho_{i,j} < 1$, então a formação de uma carteira justifica-se, porque o desvio padrão da mesma é menor do que seria se os ativos fossem mantidos separadamente pelo investidor;
 - Ou ainda, se o mesmo não optasse pela diversificação do investimento.



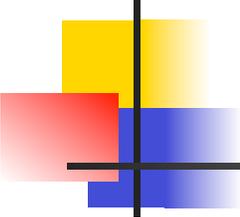
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso de dois ativos mantidos em carteira:
 - Qual a melhor combinação entre dois ativos de forma a obter o retorno esperado mais elevado?
 - Qual a melhor combinação entre dois ativos de forma a obter o desvio padrão mínimo?
 - A resposta a essas duas questões é a carteira de variância mínima (MVP);
 - Trata-se da carteira com a menor variância possível e, por conseguinte, o desvio padrão mínimo.



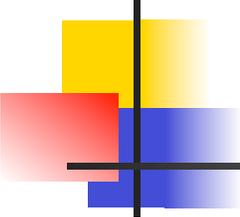
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso de dois ativos mantidos em carteira:
 - Um investidor que está diante da oportunidade de investir em uma carteira encara o que chamamos em finanças de:
 - Conjunto de oportunidades;
 - Fronteira de possibilidades;
 - O investidor pode, em princípio, escolher qualquer combinação possível de dois ativos de forma a obter o retorno esperado máximo, para um dado nível de desvio padrão admitido pelo mesmo como mínimo.



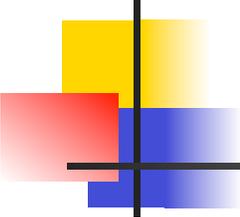
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso de dois ativos mantidos em carteira:
 - Nenhum investidor decide investir em uma carteira, cujo retorno esperado está abaixo do retorno esperado de uma carteira com retorno esperado menor e desvio padrão mais elevado;
 - Logo, a fronteira de variância mínima é denominada de fronteira eficiente. Isto é, um conjunto de possibilidades que domina, para os pares de pontos retorno esperado e desvio padrão todos os demais.



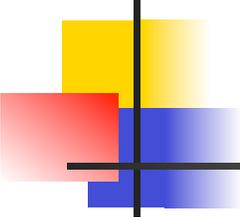
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso de dois ativos mantidos em carteira:
 - Quanto menor o coeficiente de correlação entre dois ativos, a fronteira eficiente torna-se mais curvilínea;
 - O efeito diversificação cresce quando o valor de ρ decresce. Isto é, quando $\rho \rightarrow -1$;
 - A fronteira atinge a sua curvatura máxima quando $\rho = -1$, ou quando o grau de correlação entre os ativos é perfeito e negativo.



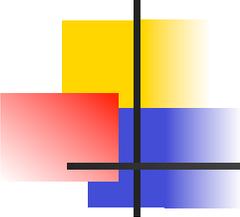
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso geral:
 - Embora as combinações envolvendo muitos ativos possam parecer, à primeira vista, infindáveis, no entanto, estão contidas num conjunto de opções fechado;
 - Na verdade, isto se refere à situação em que o mercado de capitais é racional o suficiente para excluir gestores e investidores que sejam, naturalmente, auto-destruidores de recursos;
 - Não existe a possibilidade de incluirmos indivíduos que sejam perdedores garantidos em mercados de capital.



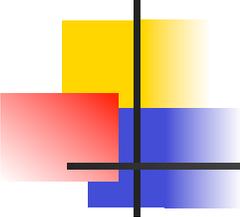
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso geral:
 - Neste caso, as possibilidades de combinação de ativos em carteiras de investimento formam uma área n-dimensional;
 - Claramente, os investidores e/ou gestores racionais de recursos vão, necessariamente, escolher pelo princípio de maximização;
 - Trata-se do conjunto eficiente, cuja aparência gráfica muito se assemelha ao de uma carteira com dois ativos. No entanto, temos uma área, ao invés de uma curva apenas.



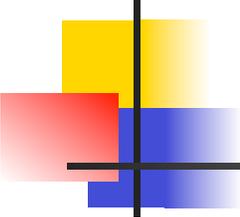
Modelo CAPM

- Fronteira eficiente para o caso geral:
 - Resultado geral:
 - A variância do retorno esperado de uma carteira de investimento composta de N ativos depende em maior proporção das covariâncias individuais entre dois ativos da carteira tomados par-a-par do que das variâncias individuais dos ativos da carteira;
 - A dimensão das linhas ou colunas da matriz de variâncias e covariâncias dos ativos de uma carteira múltipla é exatamente o número de variâncias a serem calculadas;
 - O traço dessa matriz é a soma ponderada das variâncias individuais.



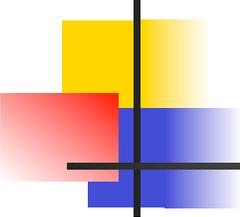
Modelo CAPM

- Decomposição do risco de um ativo:
 - O risco que o investidor toma por adquirir um ativo qualquer é chamado de risco total;
 - Por outro lado, o risco que o mesmo investidor toma por manter um investimento em uma determinada carteira é chamado de risco da carteira, ou risco proveniente da diversificação:
 - Também conhecido pela denominação de risco sistemático ou risco de mercado.
 - Por fim, resta ao investidor o risco que pode ser diversificado até o limite máximo da diversificação:
 - Risco diversificável, risco único ou ainda risco não sistemático;
 - Trata-se do risco marginal de um ativo para o risco da carteira.



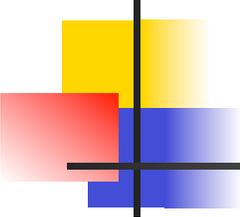
Modelo CAPM

- Perspectiva de risco do investidor:
 - O investidor típico a que o modelo CAPM se refere é do tipo avesso ao risco;
 - Definição: dentre tantas, admitimos aquela em que o investidor é do tipo que evita alternativas de risco consideradas justas (*fair games*);
 - Por que os investidores escolhem carteiras muito bem diversificadas?
 - Como são avessos ao risco, evitam riscos desnecessários, como os riscos não sistemáticos;
 - Se esta não lhe parece uma resposta razoável, então imagine se você mesmo tomaria esse tipo de risco, desnecessariamente.



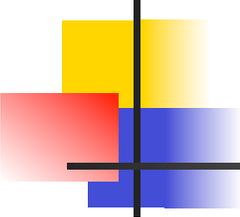
Modelo CAPM

- Até o presente momento, admitimos que todos os ativos em análise são ativos de risco;
- Isto é, o investidor combina, em princípio, apenas ativos de risco na sua carteira;
- No entanto, o mesmo investidor pode combinar ativos de risco e ativos livres de risco na mesma carteira de investimento:
 - Ativos livres de risco: notas do tesouro dos EUA;
 - Ativos de risco muito baixo.



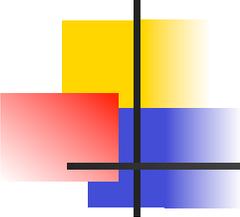
Modelo CAPM

- A carteira ótima:
 - Combinamos agora ativos de risco juntamente a ativos livre de risco na mesma carteira de investimento;
 - Capital market line: carteiras formadas pelas combinações do ativo livre de risco e os demais ativos na fronteira de variância mínima;
 - Além desse ponto, o investidor é suposto tomar recursos emprestados à taxa de juros livre de risco para adquirir mais ativos do que no ponto pertencente à fronteira de variância mínima.



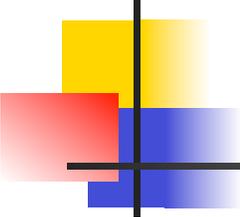
Modelo CAPM

- A carteira ótima:
 - Ponto em que a capital market line é tangente ao conjunto de possibilidades eficientes de ativos;
 - Como a CML é tangente à MVF, então estão disponíveis as melhores oportunidades possíveis ao investidor em mercado;
 - Nesse sentido, a CML pode ser interpretada como o conjunto eficiente para todos os tipos de ativos.



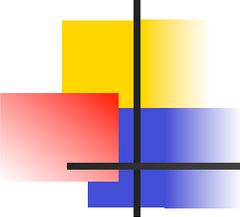
Modelo CAPM

- A carteira ótima:
 - Logo, diante da possibilidade de emprestar e tomar emprestado recursos à taxa de juros livre de risco, sem limites, a carteira de ativos de risco mantida pelo investidor é sempre determinada no ponto em que a CML tangencia a MVF;
 - Esse resultado é conhecido em finanças pela denominação de princípio da separação;
 - Isto é, a decisão de investimento do investidor consiste de duas etapas separadas:



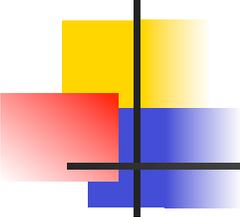
Modelo CAPM

- Princípio da separação:
 - Após estimar:
 - Retornos esperados;
 - Variâncias dos ativos individuais;
 - Covariâncias entre os ativos de risco.
 - O investidor procede ao cálculo do conjunto eficiente de possibilidades com ativos de risco. Em seguida, obtém o ponto de tangência entre a CML e a MVF;
 - Essa carteira, produto da tangência das duas curvas, é aquela que o investidor vai, certamente, escolher;
 - Essa combinação, ou ponto de tangência das duas curvas, foi determinado apenas a partir das estimações de retornos, variâncias e covariâncias;
 - Nenhuma característica individual foi necessária a esta etapa (grau de aversão ao risco, por exemplo).



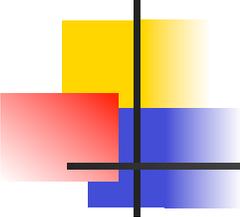
Modelo CAPM

- Princípio da separação:
 - Em seguida, o investidor deve determinar como ele combina as situações:
 - A carteira contendo apenas ativos de risco;
 - Com o ativo livre de risco.
 - O investidor deve investir parte de seus recursos no ativo de risco e, a outra parte, no ativo livre de risco;
 - Então, o investidor termina numa situação intermediária entre R_F e o ponto na fronteira de possibilidades.



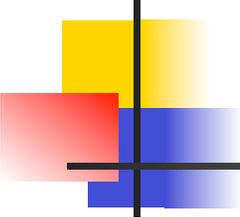
Modelo CAPM

- Equilíbrio de mercado:
 - Definição: se todos os investidores escolhem a mesma carteira contendo ativos de risco, logo é possível determinar que tipo de carteira é essa;
 - Do ponto de vista usual, trata-se da carteira de valor de mercado ponderado de todos os ativos;
 - A denominação correta é *market portfolio*.
- Na prática, utiliza-se o IBOVESPA como variável *proxy* para o que chamamos de carteira de mercado.



Modelo CAPM

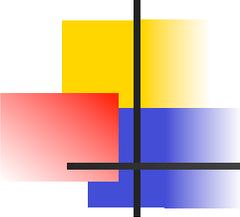
- Definição de risco, quando os investidores investem na carteira de mercado:
 - A melhor medida de risco para um ativo qualquer e pertencente a uma carteira extensa, como a carteira de mercado, é chamada de beta do ativo;
 - $\beta > 1$: representa uma situação de adição marginal de risco à carteira de investimento;
 - $\beta < 1$: representa uma situação inversa à anterior, com redução de risco da carteira;
 - Na verdade, o beta mede o grau de resposta de um ativo qualquer a alterações na carteira de mercado.



Modelo CAPM

- Beta:

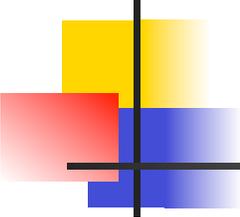
$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$



Modelo CAPM

- Propriedade do *beta*: o *beta* médio, quando ponderado pela proporção dada pelo valor de mercado de cada ativo comparado ao valor do ativo de mercado é igual a 1.

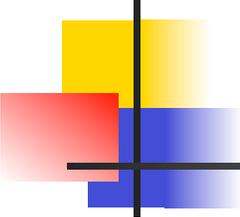
$$\sum_{i=1}^N X_i \beta_i = 1$$



Modelo CAPM

- Relação entre risco e retorno esperado (CAPM):
 - Formalmente, a relação entre risco e retorno é direta;
 - Retorno esperado no mercado: os economistas da área de finanças admitem que o retorno esperado em mercado seja dado pela seguinte expressão:

$$\overline{R}_M = R_F + PR$$



Modelo CAPM

- Relação entre risco e retorno esperado (CAPM):
 - Retorno esperado de um ativo: trata-se de uma relação direta com o respectivo *beta*. Assim, diante de hipóteses específicas, podemos admitir o seguinte:

$$\bar{R} = R_F + \beta(\bar{R}_M - R_F)$$