MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Lista de Exercícios 2: Números Reais, Supremo e Ínfimo

4. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, exiba um contra-exemplo.

   (a) A soma de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.

   (b) O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

   (c) A soma de dois números irracionais é irracional.

   (d) O produto de dois números irracionais é irracional.

   <u>Solução</u>

   (a) A afirmação é verdadeira.

   Sejam $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e suponha, por absurdo, que $x + y = z \in \mathbb{Q}$.
   Existem $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ e $s \neq 0$ tais que $x = \dfrac{p}{q}$ e $z = \dfrac{r}{s}$. Temos:

$$x + y = z \iff y = z - x = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{sq}$$

   Como $q, r, p, s \in \mathbb{Z}$, tem-se que $qr - ps \in \mathbb{Z}$. Além disso, $sq \in \mathbb{Z}^*$. Assim concluímos que $y = \dfrac{qr - ps}{sq} \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição.
   Portanto, $x + y \notin \mathbb{Q}$.

   (b) A afirmação é verdadeira.

   Sejam $x \in \mathbb{Q}^*$ e $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e suponha, por absurdo, que $x\,y = z \in \mathbb{Q}$.
   Existem $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$, $p \neq 0$ (pois $x \neq 0$) e $s \neq 0$ tais que $x = \dfrac{p}{q}$ e $z = \dfrac{r}{s}$.
   Como $x \neq 0$, existe $x^{-1} = \dfrac{q}{p}$. Temos:

$$x\,y = z \iff y = x^{-1}z = \frac{q}{p} \cdot \frac{r}{s} = \frac{q\,r}{p\,s}$$

   Como $q, r, p, s \in \mathbb{Z}$, tem-se que $qr \in \mathbb{Z}$. Além disso, $ps \in \mathbb{Z}^*$. Concluímos que, $y \in \mathbb{Q}$, o que é uma contração.
   Portanto, $x\,y \notin \mathbb{Q}$.

   (c) A afirmação é falsa.

   Contra-exemplo: Sejam $x = \sqrt{2}$ e $y = 1 - \sqrt{2}$. Sabemos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (demonstrado em aula). Pelo item (a) do exercício, vemos que $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, já que y é a soma do racional 1 com o irracional $-\sqrt{2}$. Temos: $x + y = \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \in \mathbb{Q}$.
   Portanto, a soma de dois irracionais nem sempre é um irracional.

   (d) A afirmação é falsa.

   Contra-exemplo: Sejam $x = y = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
   $xy = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.
   Portanto, o produto de dois irracionais pode não ser um irracional.

Alguns comentários sobre a resolução:

Em qualquer demonstração, é importante que a redação seja clara e objetiva.

No caso deste tipo de exercícios (V ou F), a primeira coisa a ser escrita é se você considera a sentença verdadeira ou falsa, pois o que vem em seguida depende disso. Dessa forma, o leitor terá clareza de que em seguida virá ou uma demonstração ou um contra-exemplo. Isso não pode ser uma surpresa!

Coisas importantes, por mais óbvias que sejam, precisam estar escritas. Nada deve ficar subentendido. Por exemplo, a sentença "se $x \in \mathbb{Q}$ então $x = \frac{p}{q}$ " está incompleta. Consequentemente, errada! Por exemplo $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq \mathbb{Q}$. Precisa estar escrito que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

No caso de demonstração por absurdo, depois que se chegou a uma contradição, devemos escrever qual a conclusão!

No caso de afirmação falsa, basta dar um contra-exemplo. Escrever exemplos de situações em que a afirmação vale não ajudam a compreensão do argumento. Pelo contrário, podem confundir o leitor!

Quando for dar um contra-exemplo, procure algo que saiba provar ou argumentar. Um aluno afirmou que π^2 é irracional... Será verdade? Com base em quê? Não é melhor escolher outro irracional mais simples para usar como argumento?

Outros comentários:

O corretor deve prestar atenção aos detalhes!

Vi pessoas que deram nota integral para textos confusos, incompletos, faltando hipóteses.

No caso do π^2, os corretores deveriam ter questionado se π^2 é mesmo irracional, ou perguntar "por que? ", pois essa afirmação não é óbvia! Note que nós não provamos nem que π é irracional! Nem sei se π^2 é mesmo irracional. Nunca li nada sobre isso!

Não entendi o que aconteceu no caso de uma pessoa deu nota integral (100) para o colega que entregou apenas metade dos exercícios!

Quando o corretor não faz o seu papel de apontar onde estão os pontos fracos, perde-se a oportunidade de ensinar/aprender com os erros.

Lembrem-se de que estamos aqui para aprender!

É mais fácil perceber os problemas na redação de outra pessoa do que na nossa própria redação! Quando escrevemos, entendemos nossas ideias, mesmo que a escrita esteja confusa. Quando estamos lendo o texto de outra pessoa, a gente percebe rapidamente quando ele não está claro! Ao criticarmos o trabalho de outra pessoa, além de ajudar o colega a melhorar seu trabalho, aprendemos a ser mais exigentes com nossas próprias resoluções.

O uso de uma linguagem adequada no ensino de matemática é uma ferramenta importante de um bom professor. Ninguém entende um professor confuso, um livro mal escrito, uma apostila mal feita!

Os exercícios de correção de trabalhos dos colegas permite maior reflexão sobre os temas estudados, aumenta a autocrítica. Continuarei pedindo exercícios desse tipo e serão sempre exercícios de resolução mais simples. Tentem aproveitar a oportunidade para caprichar neles!