PME3100 Mecânica I

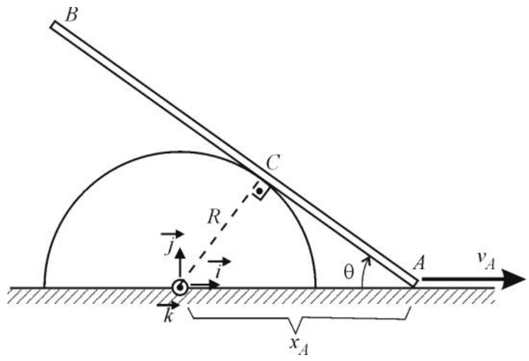
CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exemplo 2: A extremidade A da barra AB, sempre em contato com o plano horizontal, tem velocidade V constante. Sabendo-se que a barra move-se no plano do papel, mantendo contato com o semi-círculo de raio R, determine, em função de θ:

a) a velocidade angular vetorial da barra AB;

b) a velocidade vetorial do ponto C da barra em contato com o semi-círculo;

c) a aceleração vetorial do mesmo ponto C.



Resolução:

a) $\vec{\omega}$ da barra AB:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = (-\dot{\theta})\vec{k}$$

$\dot{\theta}$ pode ser determinado geometricamente:

$$\begin{cases} V = \dfrac{dx_A}{dt} \\ x_A = \dfrac{R}{\sin\theta} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{\sin\theta}\right) = -\frac{R}{\sin^2\theta}\cos\theta\ \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{V\sin^2\theta}{R\cos\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{\omega}} = \frac{\boldsymbol{V\sin^2\theta}}{\boldsymbol{R\cos\theta}}\boldsymbol{\vec{k}}$$

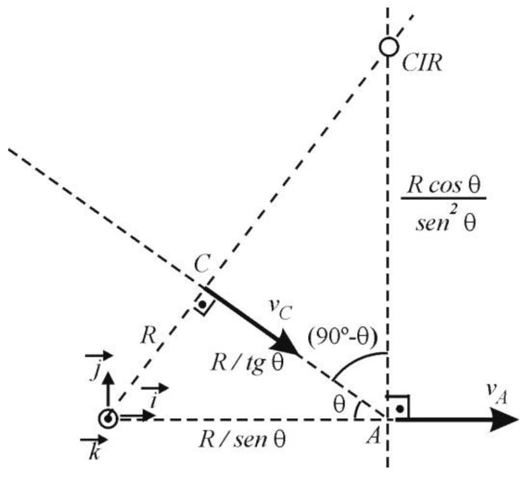
Alternativamente, usando o CIR

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (A - CIR) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\vec{\imath} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left(-\frac{R\cos\theta}{\sin^2\theta}\vec{\jmath}\right) =$$

$$= \frac{\omega R\cos\theta}{\sin^2\theta}\vec{\imath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{V\sin^2\theta}{R\cos\theta} \text{ ou } \boldsymbol{\vec{\omega}} = \frac{\boldsymbol{V\sin^2\theta}}{\boldsymbol{R\cos\theta}}\boldsymbol{\vec{k}}$$



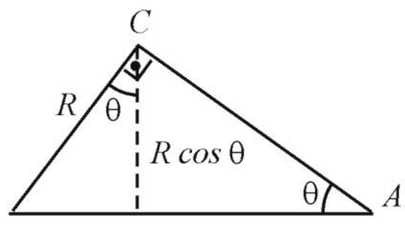
b) $\vec{v}_C$ (ponto C da barra em contato com o semi-círculo):

Fórmula de Poisson:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A)$$

$(C - A)$:

$$(C - A) = R\cos\theta\,\vec{\jmath} - \frac{R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\imath}$$



Portanto:

$$\vec{v}_C = V\vec{\imath} + \frac{V\sin^2\theta}{R\cos\theta}\vec{k} \wedge \left(R\cos\theta\,\vec{\jmath} - \frac{R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\imath}\right) =$$

$$= V\vec{\imath} - V\sin^2\theta\,\vec{\imath} - V\sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_C = V(\cos^2\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath})}$$

c) aceleração do mesmo ponto C:

O $\vec{v}_C$ calculado é a velocidade vetorial de um ponto da barra, no instante em que este está em contato com a circunferência (e não em qualquer instante). Assim, a aceleração do ponto **não pode** ser calculada pela derivação da expressão acima. É necessário usar a expressão geral da aceleração:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - A)]$$

(lembrar que a aceleração do CIR é $\neq \vec{0}$)

$\vec{a}_A$: $\quad \vec{a}_A = \vec{0}$ (V é constante)

$\dot{\vec{\omega}}$: $\quad \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V\sin^2\theta}{R\cos\theta}\right) = \frac{V}{R}\left(\frac{2\sin\theta\cos^2\theta\;\dot{\theta} + \sin^3\theta\;\dot{\theta}}{\cos^2\theta}\right) =$$

$$= \frac{V\,\dot{\theta}\sin\theta}{R}\left(\frac{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = \frac{V\,\dot{\theta}\sin\theta}{R}\left(\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

Como $\dot{\theta} = -\omega \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{V\omega\sin\theta}{R}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$

$\dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A)$:

$$\dot{\vec{\omega}} \wedge (C - A) = \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(R\cos\theta\,\vec{\jmath} - \frac{R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\imath}\right) = -\dot{\omega}R\cos\theta\,\vec{\imath} - \frac{\dot{\omega}R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\jmath}$$

$\vec{\omega} \wedge (C - A)$:

$$\vec{\omega} \wedge (C - A) = -\omega R\cos\theta\,\vec{\imath} - \frac{\omega R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\jmath}$$

$\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - A)]$:

$$\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - A)] = \omega\vec{k} \wedge \left(-\omega R\cos\theta\,\vec{\imath} - \frac{\omega R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\jmath}\right) =$$

$$= -\omega^2 R\cos\theta\,\vec{\jmath} + \frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\imath}$$

Portanto:

$$\vec{a}_C = -\dot{\omega}R\cos\theta\,\vec{\imath} - \frac{\dot{\omega}R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\jmath} - \omega^2 R\cos\theta\,\vec{\jmath} + \frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{\imath} \Rightarrow$$

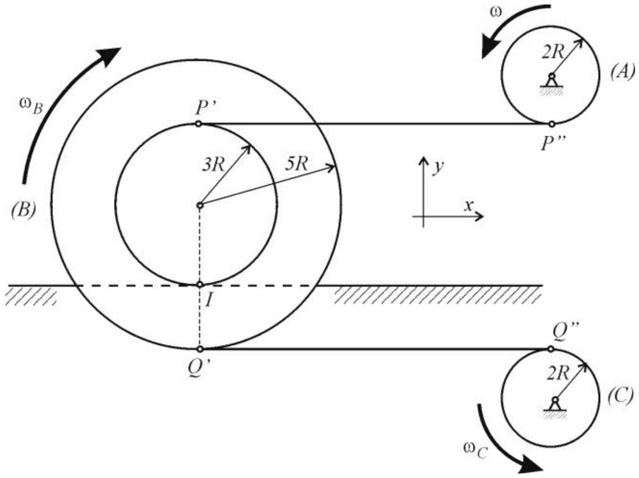
$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_C = \frac{V^2\sin^3\theta}{R\cos^2\theta}(1 + 2\cos^2\theta)\vec{\imath} + \frac{2V^2\sin^2\theta\cos\theta}{R}\vec{\jmath}}$$

Comparando com a derivada da expressão de $\vec{v}_C$ obtida anteriormente:

$$\frac{d}{dt}[V(\cos^2\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath})] = \frac{V^2\sin^2\theta}{R\cos\theta}[2\sin\theta\cos\theta\,\vec{\imath} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\vec{\jmath}]$$

Esta derivada é a variação de velocidade dos sucessivos pontos C da barra que estão em contato com o semi-círculo naquele instante.

Exemplo 3: No sistema indicado na figura, determine a velocidade angular da polia *C*. A polia *B* rola sem escorregar e o fio é perfeitamente flexível e inextensível. Não há escorregamento do fio em relação às polias. A velocidade angular de *A* é ω.



Resolução:

Fio flexível e inextensível: $\vec{v}_{P\prime} = \vec{v}_{P\prime\prime} = 2\omega R\vec{\imath}$

Disco B, usando I (CIR; rola sem escorregar):

$$\vec{v}_{P\prime} = \vec{v}_I + \vec{\omega}_B \wedge (P' - I) = -\omega_B\vec{k} \wedge (6R\vec{\jmath}) = 6R\omega_B\vec{\imath}$$

Igualando: $2\omega R = 6R\omega_B \Rightarrow \omega_B = \frac{\omega}{3}$

Também: $\vec{v}_{Q\prime} = \vec{v}_{Q\prime\prime}$ (fio flexível e inextensível)

Disco B: $\vec{v}_{Q\prime} = \vec{v}_I + \vec{\omega}_B \wedge (Q' - I) = -\left(\frac{\omega}{3}\right)\vec{k} \wedge (-2R\vec{\jmath}) = -\frac{2R\omega}{3}\vec{\imath} = \vec{v}_{Q\prime\prime}$

Disco C: $\vec{v}_{Q\prime\prime} = -2\omega_C R\vec{\imath}$

Assim: $-\frac{2R\omega}{3} = -2\omega_C R \Rightarrow \boldsymbol{\omega_C = \frac{\omega}{3}}$

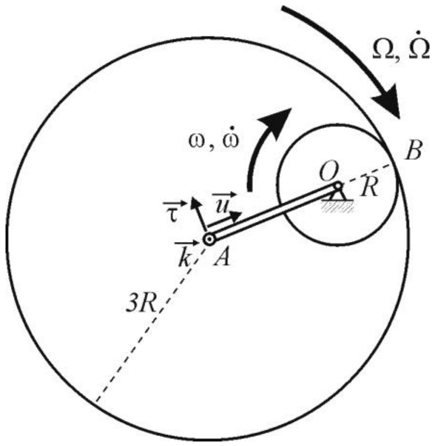
Exemplo 4: O centro O do disco é fixo, o disco tem raio R e gira com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$. O disco de centro A e raio $3R$ gira com velocidade angular Ω e aceleração angular $\dot{\Omega}$, mantendo sempre um ponto de contato (onde não há escorregamento) com o disco de centro O. Nessas condições, determine:

a) a velocidade e a aceleração do ponto A

b) a velocidade e a aceleração angulares da barra AO

c) a velocidade e a aceleração do ponto B do disco de centro A em contato com o disco de centro O.

(Obs.: como esses discos se movem?)



Resolução:

a) $\vec{v}_A$ e $\vec{a}_A$

A e B são pontos do disco de centro A e raio $3R$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge (A - B) = \vec{v}_B + \Omega\vec{k} \wedge (-3R\vec{u}) = \vec{v}_B + 3R\Omega\vec{\tau} \qquad (1)$$

Para o disco de centro O e raio R:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (B - O) = \left(-\omega\vec{k}\right) \wedge (R\vec{u}) = -\omega R\vec{\tau} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$\vec{v}_A = -\omega R\vec{\tau} + 3R\Omega\vec{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_A = -R(\omega + 3\Omega)\vec{\tau}}$$

Como esta expressão vale para qualquer instante, a aceleração é a derivada:

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = -R\left(\dot{\omega} + 3\dot{\Omega}\right)\vec{\tau} - R(\omega + 3\Omega)\dot{\vec{\tau}}$$

Não temos $\dot{\vec{\tau}}$; então, vamos usar a expressão geral da aceleração aplicada à barra AO:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_{AO} \wedge (A - O) + \vec{\omega}_{AO} \wedge [\vec{\omega}_{AO} \wedge (A - O)]$$

$$\vec{\omega}_{AO}:\ \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{AO} \wedge (A - O) \Rightarrow -R(\omega + 3\Omega)\vec{\tau} = \vec{0} + \omega_{AO}\vec{k} \wedge (-2R\vec{u}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{AO} = \frac{(\omega - 3\Omega)}{2} \Rightarrow \vec{\omega}_{AO} = \frac{(\omega - 3\Omega)}{2}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{AO}:\ \dot{\vec{\omega}}_{AO} = \frac{(\dot{\omega} - 3\dot{\Omega})}{2}\vec{k}$$

Portanto:

$$\vec{a}_A = \vec{0} + \left(\frac{\dot{\omega} - 3\dot{\Omega}}{2}\right)\vec{k} \wedge (-2R\vec{u}) + \left(\frac{\omega - 3\Omega}{2}\right)^2 \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (-2R\vec{u})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_A = -(\dot{\omega} - 3\dot{\Omega})R\vec{\tau} + \frac{(\omega - 3\Omega)^2}{2}R\vec{u}}$$

b) $\boldsymbol{\vec{\omega}_{AO}}$ **e** $\boldsymbol{\dot{\vec{\omega}}_{AO}}$

Já obtidos acima:

$$\boldsymbol{\vec{\omega}_{AO} = \frac{(\omega - 3\Omega)}{2}\vec{k}}$$

$$\boldsymbol{\dot{\vec{\omega}}_{AO} = \frac{(\dot{\omega} - 3\dot{\Omega})}{2}\vec{k}}$$

c) $\boldsymbol{\vec{v}_B}$ **e** $\boldsymbol{\vec{a}_B}$ **de** $\boldsymbol{B}$ **do disco de centro** $\boldsymbol{A}$ **e raio 3**$\boldsymbol{R}$

Condição de contato sem escorregamento:

$$\vec{v}_{B(A,3R)} = \vec{v}_{B(O,R)}$$

De (1): $\vec{v}_{B(O,R)} = -\omega R\vec{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_{B(A,3R)} = \vec{v}_B = -\omega R\vec{\tau}}$

Os dois pontos, do disco (*A*, 3*R*) e do disco (*O*, *R*), que estão em contato na posição *B* num determinado instante, têm a mesma velocidade nesse instante (não há escorregamento), mas não têm a mesma aceleração (são pontos distintos, com trajetórias distintas).

<u>**A aceleração NÃO É a derivada da expressão acima:**</u>

- derivada: $\boldsymbol{\dot{\vec{v}}_B} = -\dot{\omega}R\vec{\tau} - \omega R\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\omega}R\vec{\tau} - \omega R(\vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{\tau}) = \boldsymbol{-\dot{\omega}R\vec{\tau} - \frac{\omega(\omega-3\Omega)R}{2}\vec{u}}$

  É a variação de velocidade dos sucessivos pontos que ocupam a posição B.

- $\boldsymbol{\vec{a}_{B(O,R)}} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - O)] = \boldsymbol{-\dot{\omega}R\vec{\tau} - \omega^2 R\vec{u}}$

  É a aceleração do ponto do disco (O, R) no instante em que ele está na posição B.

- $\boldsymbol{\vec{a}_{B(A,3R)}} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (B - A) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (B - A)\right] = \boldsymbol{-\dot{\omega}R\vec{\tau} + \left[\frac{(\omega-3\Omega)^2}{2} - 3\Omega^2\right]R\vec{u}}$

  É a aceleração do ponto do disco (A, 3R) no instante em que ele está na posição B.

Resposta:

$$\boldsymbol{\vec{a}_{B(A,3R)} = -\dot{\omega}R\vec{\tau} + \left[\frac{(\omega - 3\Omega)^2}{2} - 3\Omega^2\right]R\vec{u}}$$