7.1 Exercícios do tema TCL

7.1.1 Exercícios em cujas soluções surge a distribuição binomial cujos valores devem ser aproximados pela distribuição normal

Exc. 92. Use a aproximação da binomial pela normal para estimar as seguintes probabilidades:
(a) $I\!P\big[20 \leq B \leq 30\big]$, sendo $B \sim \text{Bin}(80; 0,3)$;
(b) $I\!P\big[B \leq 40\big]$, sendo $B \sim \text{Bin}(100; 0,4)$;
(c) $I\!P\big[50 \leq B \leq 60\big]$, sendo $B \sim \text{Bin}(80; 0,7)$;
(d) $I\!P\big[B \geq 50\big]$, sendo $B \sim \text{Bin}(300; 0,25)$.

Os Exercícios 93, 94, 95, que seguem-se abaixo, representam uma classe particular de exercícios que aparecem em livros didáticos de Estatística, quando esses falam sobre aplicações do TCL. A classe carateriza-se pela seguinte propriedade. A resolução de qualquer problema da classe faz-se em duas etapas específicas, a saber: na primeira etapa, a pergunta de exercício interpreta-se da maneira que permite dar a resposta em termos de uma distribuição binomial, e depois, na segunda etapa da solução, as probabilidades dessa distribuição calculam-se com o uso da aproximação dela por distribuição normal. A primeira dessas duas etapas não tem nada a ver com o TCL; sua execução baseia-se exclusivamente nas perícias de aluno adquiridas por ele em seus estudos da distribuição binomial. Já a segunda etapa pertence por inteiro ao tema "TCL e suas aplicações". Os exercícios dessa classe são queirdos para educadores, e em particuar, em situações quando educadores precisam compor provas ou exames, pois os exercícios permitem misturar dois temas numa questão só. Ainda mais, se o educador/examinador omitir do enunciado a frase "usando a aproximação de binomial pela normal", então ele/ela consegue aumentar o nível de dificuldade de prova/exame, já que o sucesso na resolução do exercício com omissão terão somente os alunos que entendem toda a matéria no nível de profundeza suficiente para poder adivinhar que a solução sai de mistura da distribuição binomial com a distribuição normal e com a aproximação da primeira pela segunda. E tem mais: essa adivinhação de aluno tornar-se-á difícil em dobro, se o educador/examinador omitir também a palavra "aproximadamente". Alguns educadores fazem essas omissões com o propósito de testar a real compreenção da matéria por seus alunos; outros educadores fazem isso por incompetência.

Exc. 93. Exatamente 30% da população da cidade apoiava o antigo prefeito que perdeu a última eleição. (Observe que as eleções já passaram e é por isto que sabe-se a proporção exata do eleitorado do antigo prefeito.) Calcule aproximadamente, usando a aproximação da binomial pela normal, a probabilidade de que, dentre 100 moradores da cidade, escolhidos ao acaso, no mínimo 40 sejam do eleitorado deste candidato.

Ajuda ao Exc. 93. Para resolver esse exercício, é preciso interpretar seu enunciado de acordo com o seguinte
MODELO*: Cada pessoa da cidade é uma bola na urna. As que apoiam o antigo prefeito – 30% em proporção de toda a população – são bolas pretas; as outras bolas são brancas. Está feita a escolha com reposição de 100 bolas da urna. A pergunta é a probabilidade do número de bolas pretas dentre as escolhidas ser 40 no mínimo.

Segue-se do MODELO* que o número de bolas pretas dentre as 100 escolhidas segue a distribuição binomial com $n = 100$ e $p = 0,30$. Portanto, a aceitação do MODELO* leva ao surgimento de distribuição binomial na solução do exercício, o que está de acordo com a indicação dada no seu enunciado ("...usando a aproximação da binomial..."). Com isso, a probabilidade em questão expressa-se como $I\!P[X \geq 40]$, onde $X \sim \text{Bin}(100; 0,30)$. O valor dela calcula-se via a aproximação pela $I\!P[Y \geq 40]$, onde, de acordo com o teorema sobre a aproximação, $Y \sim \mathcal{N}(100\times 0,3; 100\times 0,3\times(1-0,3))$. Essa foi a indicação do caminho para a solução do exercício.

É importante salientar que o leitor/aluno, cujo nível de conhecimento está de acordo com o presente texto, não conseguiria criar qualquer outro modelo, do qual surgeria a distribuição binomial. É por

isso que os educadores que compuseram o exercício não se preocuparam com o detalhamento que induziria o aluno a criar o MODELO*, que está formulado acima e não qualquer outro modelo. Para a completude de minha argumentação, apresento abaixo os quesitos que são necessários para que a "historinha" contada no enunciado esteja coerente com o MODELO*:
(1) O nome de cada morador da cidade coloca-se numa tira de papel, as quais são colocadas numa urna e misturadas.
(2) Escolham-se 100 tiras, com reposição; aos correspondentes moradores pergunta-se se apoiava o antigo prefeito ou não.

O quesito (2) está em conflito com nossa experiência de que não se intervista mais que uma vez o mesmo cidadão em qualquer pesquisa de opinião. Por isso que (2) estaria comumente substituido por
($2'$) Escolham-se 100 tiras, sem reposição, mas assume-se que a população da cidade e grande o suficiente para garantir que a probabilidade de escolher qualquer cidadão em qual uma das 100 escolhas é a mesma; depois da escolha, aos correspondentes moradores pergunta-se se apoiava o antigo prefeito ou não.

Se você, meu leitor, está ainda na dúvida acerca do caminho que leva o enunciado, acrescido por (1) e por ($2'$) ao MODELO*, eis a dica: é só substituir "tira" por "bola" e pintar de preto as bolas que correspondem aos moradores que apoiaram o prefeito.

Exc. 94. Sabe-se que 25% das crianças expostas a um particular agente infeccioso adquirem uma certa doença. Considere um grupo de 60 crianças. Calcule aproximadamente, usando a aproximação da binomial pela normal, a probabilidade de que no mínimo 15 e no máximo 20 crianças do grupo adoençam.

Ajuda ao Exc. 94. A frase *"sabe-se que 25% das crianças expostas a um particular agente..."* significa que trata-se de uma população de crianças. Entretanto, o enunciado não especifica se
(i) essa população é só um grupo específico que ficou exposto a um agente infeccioso, ou
(ii) essa é a população de todas as crianças do mundo que potencialmente podem ser expostas ao agente.

Também, o enunciado não esclarece se 25% é
(a) a proporção das crianças, cujo genótipo ou o estado de saúde é tal, que ao serem expostas ao agente, ficarão doente, ou (b) se dentro de cada criança há uma "moeda" que dá "cara" com a probabilidade 25%, e que a exposição da criança ao agente infeccioso acarreta o lançamento de sua moeda que manda a criança adoentar caso sair "cara".

Acontece, meu querido leitor, que dentre todas as distribuições probabilísticas, que são capazes de modelar o experimento aleatório do enunciado, você só conhece a distribuição binomial. Por isso é que para qualquer das quatro alternativas possíveis (que surgem da combinação de (i),(ii) com (a), (b)), você vai criar tal modelo para o experimento aleatório que permite usar a distribuição binomial para expressar a questão colocado no enunciado. Eis o modelo:
MODELO 1: você representa cada criança da população por uma bola, você tinge de preto 25% das bolas, e coloca todas numa urna; você vai retirar da urna, ao acaso e com reposição, 60 bolas, e você está interessado na probabilidade que as retiradas mostrem no mínimo 15 e no máximo 20 bolas pretas.

É óbvio que o número de bolas pretas a ser visto em 60 retiradas com reposição tem a distribuição Binomial$(60; 0,25)$. Para fechar a solução do exercício, resta então só estimar $I\!P[15 \leq B \leq 20]$ com ajuda do teorema, que explica como a estimação possa ser feita com ajuda da aproximação de distribuição binomial pela distribuição normal.

Se você, meu querido leitor, ainda tem dúvidas acerca de adequação do MODELO 1 ao enunciado do exercício, leia então, por favor, os comentários abaixo.

Caso você intendeu o enunciado do exercício de acordo com a interpretação (i)-(a) ou (ii)-(a), então o MODELO 1 valida-se da mesma maneira como o MODELO* foi validado para o experimento descrito no Exc. 93.

Já se você intendeu o enunciado do exercício de acordo com a interpretação (i)-(b) ou (ii)-(b), então é natural que o modelo seja assim:
MODELO 2: escolha-se, ao acaso, 60 moedas de um saco de moedas idênticas, sendo que cada delas,

ao ser lançada, mostra sua face preta com a probabilidade 25%, e sua face branca com a probabilidade 75%; após a escolha, as moedas escolhidas serão lançadas, e nos interessa a probabilidade que o número total das faces pretas esteja no mínimo 15 e no máximo 20.

Vamos comparar o MODELO 2 com o seguinte:
MODELO $2'$: Lança-se uma emença quantidade de moedas, cada uma das quais mostra face preta ou branca com as respectivas probabilidades 25% e 75%. As moedas, que mostraram face preta, pintam-se todas de preto, e as que mostraram face branca, pintam-se todas de branco. As moedas pintadas colocam-se numa urna, da qual escolha-se 60 moedas, ao acaso e sem reposição. Pergunta-se a probabilidade de vermos no mínimo 15 e no máximo 20 moedas pretas dentre os 60 escolhidas.

É óbvio que há coincidência absoluta das respostas aos perguntas colocados nos MODELOS 2 e $2'$. Mas também é óbvio que o MODELO $2'$ é idêntico ao MODELO 1. É por isso que MODELO 1 utiliza-se tanto para as situações (i)-(a) e (ii)-(a) quanto para as (i)-(b) ou (ii)-(b).

Exc. 95. O dono da lanchonete do nosso instituto sabe que cada freguês escolhe carne ou frango com as respectivas probabilidades 60% e 40%. Combinamos com ele que os 100 participantes de um encontro científico que acontecerá amanhã irão almoças na sua lanchonete. No estoque da lanchonete, tem-se carne suficiente para 100 pratos, mas a quantidade de frango dá só para 45 pratos. Pede-se calcular, aproximadamente, com o uso da aproximação de binomial por normal, a probabildiade de todos os pedidos sejam satisfeitos.

Ajuda ao Exc. 95. Você pode pensar assim: Todas as pessoas são bolas numa emensa urna, e 40% das bolas preferem frango, e por isso são pintadas de preto, enquanto que 60% preferem carne, e foram pintadas de branco. Dessa urna, a sorte escolha ao acaso 100 bolas, que representam os participantes do encontro científico mencionado no enunciado. Essas "bolas" irão à lanchonete na hora do almoço, e as pretas pedirão frango, enquanto que as brancas pedirão carne. A quantidade das "bolas" que pederão frango tem a distribuição Binomial$(100; 0,4)$. O resto resolve-se pela abordagem que você viu na solução do exercício sobre o Papai Noel que levou brinquedos aos filhos de José.

Você pode pensar de uma outra maneira, que é assim. Cada um dos 100 participanete tem uma moeda que mostra "quero frango" com probabilidade 0,4 e "quero carne" com 0,6. A moeda está no estómago ou no bolso – não importa onde exatamente. Ao chegar ao balcão da lanchonete, a pessoa lança sua moeda (ou a sorte lança a moeda no estómago), e dependendo do resultado do lançamento, a pessoa pede frango ou carne. Naturalmente, a quantidade de pedidos de franco terá a distribuição Binomial$(100; 0,4)$. O resto da solução é o mesmo que o indicado no parágrafo anterior. Alias, a equivalência entre os dois pensamentos pode ser justificada pelo raciocínio que já usamos na Ajuda ao Exc. 94.

7.1.2 Exercicios do tipo "população segue, aproximadamente, uma normal"

Todos os exercícios da presente seção têm a mesma solução. Essa não ocupa o espaço não maior que um par de linhas. Dispeito disso, a quantidade de exercícios é imensa. As razões para isso acontecer são duas. A primeira é que meu aluno precisa receber uma quantidade razoável de exercícios para que ele/ela possa treinar suas perícias. Mas se fosse só isso, tal quantidade não ultrapassaria uma meia dúzia. Há então a segunda razão: essa é o pensamento de que alunos teriam facilidade de aprender a aplicação do TCL caso pensassem nas situações que são da área de sua atuação. Tipo, os alunos da meteorologia devem receber exercícios nos quais o TCL aplica-se aos fenómentos meteorológicos (como, por exemplo, o Exc. 102), os médicos devem receber exercícios nos quais o TCL aplica-se as doenças e doentes (como, por exemplo, Exc. 106), e assim por diante. Em alguns casos, os exercícios moldados dessa forma são bonitos e envolvem conceitos reias. Um exemplo disso é o Exc. 106. Ele foi criado pela colega do Departamento de Estatística que é também bacharel em Biologia. Mas na maioria dos casos, os colegas do Departamento de Estatística não são especialistas em outras áreas, e é por isso que suas invenções são vagas, embora falam de doenças, de fenómenos sociais, de notas em provas, de tempo de vida de produtos, etc. O caso mais absurdo é o Exc. 109 que foi criado por mim com o intuíto de enfatizar dois aspectos: primeiramente, o absurdo que pode surgir quendo o inventos de exercício "aplicado" não entende bem área de aplicação, e o segundo aspecto é que a solução contina ser aquelas duas linhas supramencionadas apesar da sofisticação de enredo de aplicação.

Exc. 96. O peso de um ovo tem distribuição aproximadamente normal com média 30 gramas e desvio padrão 2 gramas. Um granjeiro adquiriu direito de vender 60% da produção de ovos para uma rede de supermercados. Para maximizar o lucro desta venda, ele quer vender os ovos mais pesados da sua produção. Para isso, ele precisa achar o valor de y tal que 60% dos ovos têm peso de no mínimo y. Calcule este valor.

Exc. 97. Analisando o histograma da altura de 10.000 alunos em uma universidade concluiu-se que a distribuição normal com média 170 cm e desvio-padrão igual a 5 cm é adequada para estudar a estatura probabilisticamente.
(a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165cm?
(b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

Comentário:Esse exercício veio, sendo copiado, de um dos texto que ensinam a Estatística Básica. Não fui eu quem escreveu "Qual o número esperado de alunos com altura superior a 165cm?" Eu não sei o sentido de "o número esperado de alunos". Por mim, no lugar desse termo deveria ter aparecido "a proporção de alunos".

Exc. 98. O número de acidentados que chega por dia em certo hospital tem distribuição praticamente normal de média 75 e desvio padrão 8. Qual é a probabilidade de que, em um dia qualquer, cheguem
(a) pelo menos 75 acidentados?
(b) mais de 60 e menos de 80 acidentados?

Exc. 99. Uma clínica de emagrecimento recebe pacientes com peso seguindo uma distribuição normal de média 130 kg e desvio padrão 20 kg. Para efeito de determinar o tratamento mais adequado, os 25% dos pacientes de menor peso são classificados como "mais leves", enquanto que os 25% de maior peso, como "mais pesados". Determine os valores que delimitam cada uma dessas classificações.
Comentário:Esse é um exemplo do tipo de texto que surge quando uma faculdade – a de Fisioterapia, no caso, – pede de mim fazer exercícios cujo enredo seja mais próximo à realidade da profissão futura de seus alunos.

Exc. 100. O número de pedidos para compra de certo produto que uma companhia recebe por semana distribui-se normalmente, com média 125 pedidos e desvio padrão 30.
(a) Se em uma semana o estoque disponível é de 150 unidades, qual é a probabilidade de que todos os pedidos sejam atendidos?
(b) Qual deveria ser o estoque para que se tivesse 98% de probabilidade de que todos os pedidos fossem atendidos?
(c) Construa um intervalo centrado em torno da média que contenha 80% dos pedidos.

Exc. 101. A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição Normal, com média 5 kg e desvio padrão 0,9 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: 15% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios, os 20% seguintes como grandes e os 15% mais pesados como extras. Quais são os limites de peso para cada classificação?

Comentário:Os defensores de animais e os vegitarianos não precisam fazer esse exercício.

Exc. 102. Estudos meteorológicos indicam que a precipitação pluviométrica mensal em períodos de seca numa certa região pode ser considerada como seguindo a distribuição Normal de média 30 mm e variância 16 mm^2. *Observação: A potência 2 refere-se à medida de mensuração, isto é, a "mm", e não ao valor númerico. Mais epsecificamente: o valor numércio é 16 mesmo, e não* 16^2. *Note que neste exercício, diferentemente dos exercícios anteriores, é fornecido o valor da variância e não o do desvio padrão. Devido a isso, é agora o momento certo de te avisar sobre que a dimensão da variânica é o quadrado da dimensão de mensuração da quantidade cuja distribuição é dita aproximadamente normal. No presente caso, a quantidade é a precipitação pluviométrica. Esta está medida em milímetros. Logo a variância de sua distribuição tem dimensão* mm^2.
(a) Qual é a probabilidade de que a precipitação pluviométrica mensal no período da seca esteja entre 24 e 39 mm?
(b) Qual seria o valor da precipitação pluviométrica de modo que exista apenas 10% de chance de haver uma precipitação inferior a esse valor?
(c) Construa um intervalo central em torno da média que contenha 80% dos possíveis valores de precipitação pluviométrica.

Exc. 103. O tempo de vida útil de uma lavadora de roupas automática tem distribuição aproximadamente Normal, com média de 3,1 anos e desvio padrão de 1,2 anos.
(a) Qual deve ser o valor do tempo de garantia dessa lavadora para que, no máximo, 15% das vendas originais exija substituição?
(b) Se esse tipo de lavadora tiver garantia de 1 ano, que porcentagem das vendas originais exigirá substituição?
Observação: Em outros exercícios que você encontra neste curso e/ou em outros cursos e livros didâticos, você vé que o tempo de vida útil está sendo modelada pela distribuição exponencial. Então, é a exponencial ou a Normal? A resposta é que tudo depende do processo físico que rege a duração de vida. Para uma lâmpada, por exemplo, a exponencial é mais apropreada. Mas quando a quebra pode ser causada por diversos fatores ou defeitos de fabricação, a modelagem do tempo de vida pela Normal pode ser mais precisa.

Exc. 104. O número de vezes que um adulto respira, por minuto, depende da idade e varia grandemente de pessoa para pessoa. Suponha que a distribuição dessa variável aleatória seja normal com média de 16 e desvio padrão igual a 4.
(a) Em uma amostra de 100 pessoas, qual é o número esperado de pessoas cuja respiração excede a 22 vezes por minuto?
(b) Um programa de exercícios respiratórios será oferecido a 10% das pessoas com respiração mais rápida. Como deve ser a respiração de uma pessoa para que ela seja incluída nesse programa?

Exc. 105. Suponha que o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio padrão de 2 minutos.
(a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?
(b) E mais do que 9,5 minutos?
(c) E entre 7 e 10 minutos?
(d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

Observação: *Na realidade, na maioria dos casos do mundo real, o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição exponencial e não normal. Digo-lhe isso só para o título de conhecimento.*

Ex. 106. Sabe-se que a quantidade de ácido xanturênico excretado na urina de trabalhadores de uma indústria, que usa sulfeto de carbono como solvente, segue uma distribuição Normal com média 4,38 mg/15ml e desvio padrão 1,15mg/15ml. Determinar:
(a) A proporção de trabalhadores com quantidade de ácido xanturênico
 (i) entre 2,20 e 4,00 mg/15ml;
 (ii) acima de 5,50mg/15ml;
(b) a quantidade de ácido xanturênico que é superada por 80% dos trabalhadores.
Observação: A solução deste exercício é mais curta que o texto do enunciado recheado por termos químicos e conceitos de saúde. Entretanto, o exercício apresenta perguntas reais colocadas para problema real cujos dados empíricas revelaram, de fato, que a quantidade do tal ácido na urina de tais trabalhadores se ajustava muito bem à distribuição Normal.

Ex. 107. A nota média dos estudantes da USP no Provão de 2000 foi 465. Já no ano 2001, a nota média dos estudantes da USP foi 445. Os desvios-padrão, no entanto, foram iguais a 100, tanto em 2000 quanto em 2001. Em ambos os anos, a distribuição das notas dos estudantes da USP seguiu uma curva Normal.
(a) Qual a porcentagem de estudantes da USP que tirou mais que 600 no Provão de 2000?
(b) E no Provão de 2001?
(c) Qual porcentagem de estudantes da USP no Provão de 2000 tirou uma nota menor que a nota que somente 20% dos estudantes em 2001 não conseguiram ultrapassar?

Observação: Essa deve ser uma forma muito sofisticada de perguntar algo muito simples, mas eu não faço a menor idéia acerca daquilo que o autor dessa pergunta desejava. Se você, meu querido/a e talentoso/a aluno/a, conseguiu entender a pergunta, então dé sua resposta.)

Ex. 108. Um supermecado recebe frangos cujos pesos são distribuídos aproximadamente como uma normal de média 2 kg e variância $0,01$ kg^2.
(a) Suponha que o supermercado vende frango a R$1,00 o kg. Escolhi um ao acaso e fui pagar no caixa. Qual é a probabilidade de precisar pagar não mais que R$2,15?
(b) Para se livrar rapidamente de um grande lote de frangos recebidos do fornecedor, o supermercado decidiu selecionar aqueles que possuíam peso mínimo 1,9 kg e peso máximo 2,2 kg, a fim de vendê-los pelo preço único de R$2,00. Qual é a proporção de frangos do lote que serão vendidos dessa maneira?

Ex. 109 (Especial para veterinária.) A quantidade de pernas das galinhas da granja do Vladimir segue aproximadamente distribuição normal com média 170 e variância 36.
(a) Uma galinha fugiu. Qual é a probabilidade dessa galinha ter levado embora suas mais de 182 pernas?
(b) Qual é a proporção das galinhas da granja que têm menos que 160 pernas?
Ai! Desculpem o erro de digitação: onde está escrito "pernas"deve-se ler "penas". Com a correção deste erro, a pergunta (a) versa sobre as penas levadas pela galinha que fugiu. Também, a correção do erro esclarece a necessidade da resposta na pergunta (b): em virtude da aproximação do inverno, Vladimir quer construir um abrigo aquecido para as galinhas menos "penudas", ou seja, as que sofrem mais com o frio; é para isso que ele precisa saber a propoção das galinhas friorentas.

Exc. 110. As notas de Estatística dos alunos de uma determinada universidade distribuem-se normalmente, com média 6,4 e desvio padrão 0,8. O professor atribui graus A, B e C da seguinte forma:

Nota	Grau
$X \leq 5$	C
$5 < X \leq 7,5$	B
$7,5 < X \leq 10$	A

Em uma classe de 80 alunos, qual o número esperado de alunos com grau A? E com grau B? E com grau C?
Observação: Se você necessitar de ajuda para interpretar o termo "número esperado", veja a dica do item (b) do Ex. 111.

7.1.3 Exercicios do tipo "população segue, aproximadamente, uma normal" acrescidos por perguntas irrelevantes para o TCL

Exc. 111. Um teste de aptidão feito por pilotos de aeronaves em treinamento inicial requer que uma série de operações seja realizada em uma rápida sucessão. Suponha que o tempo necessário para completar o teste seja distribuído de acordo com uma Normal de média 90 minutos e desvio padrão 20 minutos. Para passar, o candidato deve completar o teste em menos de 80 minutos.
(a) Se 10 candidatos fazem o teste, qual a probabilidade de que pelo menos 3 sejam aprovados?*Dica: É a probabilidade de obter valor não maior que* 3 *na Distribuição Binomial com* $n = 10$ *e* p *igual a probabilidade de qualquer candidado ser aprovado.*
(b) Se 65 candidatos fazem o teste, quantos candidatos espera -se que passem? *Dica: No item (a) deste exercício, você já viu que se* K *candidados fazem o teste, então o número de aprovados segue a Distribuição Binomial cujo parámento* n *é igual a* K*,e cujo parâmetro* p *é igual à probabilidade de qualquer candidado passar no teste. Portanto, no presente item, surge a Distribuição Binomial com* $n = 65$ *e comHandbags And Gladrags valor de* p *que você deve ter calculado. Esta distribuição possui esperança matemática. À ela é que se refere no enunciado por "número esperado de candidados que passem". Posso reformular minha explicação assim: denote pela variável aleatória* X *o número de candidados que passem dentros dos 65 que façam o teste. Calcule então* $\mathbb{E}[X]$*, tomando em conta que, segundo ao enunciado,* $X \sim Bin(65, p)$.
(c) Qual é o valor do tempo máximo para se completar a prova de maneira que apenas 5% dos candidatos completam o teste num tempo inferior a esse valor?

Exc. 112. Uma enchedora automática de refrigerantes está regulada para que o volume de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3 e desvio padrão de 15 cm^3. Admita que o volume siga uma distribuição normal.
(a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3? *Observação: A potência* 3 *refere-se ao "cm" pois* cm^3 *é a unidade da medida do volume aquí usada; digo isso para evitar que você suspeite que 1000 e 15 devem ser elevados à potência* 3. *Desculpe por suspeitar que você possa ter tais intenções; é que já vi muitos alunos fazendo isso e resolvite avisar antecipadamente.*
(b) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?
(c) Se 10 garrafas são selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que, no máximo, 4 tenham volume de líquido superior a 1003 cm^3?

Exc. 113. Suponha que X, o diâmetro interno (em milímetros) de um bocal, seja uma variável aleatória normalmente distribuída com média 13 e variância 1. Se X não atender a determinadas especificações, o fabricante sofrerá prejuízo. Especificamente, suponha que o lucro L (por bocal) seja a seguinte função de X:

$$L = \begin{cases} R\$20, & \text{se } 12 \leq X \leq 14 \\ R\$-3, & \text{se } X < 12 \\ R\$-2, & \text{se } X > 14 \end{cases}$$

Qual é o lucro esperado por bocal?
Observação: Para que possa resolver este exercício, você precisa entender que "o lucro esperado por bocal" corresponde à $\mathbb{E}[L]$, onde L é como definido pelo enunciado. Segundo à definição,

$$\mathbb{E}[L] = 20\mathbb{P}[12 \leq X \leq 14] - 3\mathbb{P}[X < 12] - 2\mathbb{P}[X > 14],$$

o que reduz a solução ao cálculo de probabilidades envolvendo uma variávela aleatória normal, a qual é X, no caso. Obrigar você a fazer este ca´lculo é o objetivo mirado pelo autor do texto. Creio que o cálculo seja fácil para você. Entretanto, o exercício é um tradicional causador de estranhesa. A barreira na procura de sua solução só pode estar, portanto, na interpretação do termo "lucro esperado por bocal". Qual foi o argumento que você inventou para se convencer da correção de minha sugestão que a interpretação desse é $\mathbb{E}[L]$?

Exc. 114. O diâmetro X de rolamentos esféricos produzidos por uma fábrica tem distribuição $\mathcal{N}(0,6140; (0,0025)^2)$. O lucro T de cada rolamento depende de seu diâmetro. Assim,
$T = 0,10$, se o rolamento for bom, isto é, se $0,610 \leq X \leq 0,618$;
$T = 0,05$, se o rolamento for recuperável, isto é, se $0,608 \leq X < 0,610$ ou se $0,618 < X \leq 0,620$;
$T = -0,10$, se o rolamento for defeituoso, isto é, se $X < 0,608$ ou se $X > 0,620$.
Calcule:
(a) As probabilidades de que os rolamentos sejam bons, recuperáveis e defeituosos.
(b) Calcule o lucro médio por rolamento fabricado. Qual é a interpretação deste valor, em termos práticos?
Observação: A idéia da solução é a mesma que a do Ex. 113.

Exc. 115. A durabilidade de um tipo de pneu da marca Rodabem é descrita por uma variável aleatória Normal de média 60.000 km e desvio padrão de 8.300 km.
(a) Se a Rodabem garante os pneus pelos primeiros 48.000 km, qual a proporção de pneus que deverão ser trocados pela garantia? *Observação: Espero que seja claro que a probabilidade de um pneu, escolhido ao acaso de uma lote, durar menos que 48 mil km é a mesma que a proporção dos pneus da lote que durariam menos que 48 mil km. Este vínculo entre probabilidade e proporção existe devido à própria definição do conceito de probabilidade.*
(b) O que aconteceria com a proporção do item (a), se a garantia fosse para os primeiros 45.000 km?
(c) Qual deveria ser a garantia (em km) de tal forma a assegurar que o fabricante trocaria sob garantia no máximo 2% dos pneus?
(d) Qual o intervalo central de durabilidade que contém 85% dos pneus fabricados pela Rodabem?
(e) Se você comprar 4 pneus Rodabem, qual será a probabilidade de que você utilizará a garantia (45.000 km) para trocar um ou mais destes pneus?

Exc. 116. Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo A (comum) e tipo B (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal, sendo que no tipo A com média 9 meses e desvio padrão 2 meses e, no tipo B, com média 12 meses e desvio padrão 3 meses. Os televisores de tipo A e B são produzidos com lucro

de 1000 u.m. e 2000 u.m., respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 3000 u.m. e 8000 u.m., respectivamente.
(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B;
(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e para os televisores do tipo B;
Ajuda: *O lucro médio entende-se, naturalmente, como (a proporção dos aparelhos que não apresentaram defieto no prazo da garantia)$\times$ (lucro por aparelho vendido) $+$ (a proporção dos aparelhos que defieto no prazo da garantia $\times$(prejuízo por aparelho restituido) onde prejuízo tem que ser tomado com sinal "$-$" na fórmula. As duas proporções você consegue calcular usando a informação fornecida pelo eninciado que diz que o tempo de ocorrência de defeito no prazo de garantia tem distribuição* $\mathcal{N}(9; 2^2)$.
(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

Exc. 117. Suponha que o tempo necessário para que estudantes completem uma prova tenha distribuição normal com média 90 minutos e desvio padrão 15 minutos. Qual é a proporção de estudantes que termina a prova
(a) em menos de 80 minutos?
(b) Em mais de 120 minutos?
(c) Entre 75 e 85 minutos?
(d) Qual é o tempo necessário para que 98% dos estudantes terminem a prova?
(e) Determinar o intervalo simétrico em torno do valor médio que contenha 70% dos valores do tempo para completarem a prova?
(f) Qual é a probabilidade de que, entre 5 estudantes escolhidos ao acaso, 3 deles completem a prova em menos de 80 minutos? *Dica: É a probabilidade de obter* 3 *na Distribuição Binomial com* $n = 5$ *e* p *igual a probabilidade de qualquer aluno terminar a prova em menos que 80 minutos.*

Exc. 118. Numa certa população, o peso dos homens tem distribuição normal com média 75 kg e desvio padrão 10 kg, enquanto que o das mulheres é também normal com média 60 kg e desvio padrão 4 kg.
(a) Sorteando-se um homem qualquer, qual é a probabilidade dele ter peso acima de 65 kg?
(b) Sorteando-se uma mulher qualquer, qual é a probabilidade dela ter peso acima de 65 kg?
(c) Qual é a probabilidade de uma pessoa ter peso acima de 65 kg, sendo ela sorteada de um grupo em que o número de mulheres é o dobro do de homens?

Ex. 119. Doentes sofrendo de certa moléstia são submetidos a um tratamento intensivo, cujo tempo de cura é modelado por uma v.a. Normal de média 15 e desvio padrão 2 (em dias).
(a) Que proporção desses pacientes demora mais de 17 dias para se recuperar?
(b) Qual a probabilidade de que um paciente, escolhido ao acaso, apresente tempo de cura inferior a duas semanas?
(c) Que tempo de cura é necessário para recuperar 25% dos pacientes?
(d) Se 100 pacientes são escolhidos ao acaso, qual seria o número esperado de doentes curados em menos de 11 dias?

Ex. 120. O nível de colesterol no sangue de pessoas (digamos, do Brasil, já que o colesterol muda em função das formas de alimentação ; os finlandeses, por exemplo, consomem muita carne suína e, por isso, têm taxas de colesterol mais altas que as dos brasileiros) tem distribuição normal, com média 206 mg/100ml e desvio padrão 60mg/100ml.
(a) Uma pessoa é escolhida ao acaso da população. Qual é a proabilidade dela ter o nível de colesterol com, no máximo, 183mg/100ml?

(b) Qual é a proporção da população com o nível de colesterol elevado, ou seja, maior que 350mg/100ml?
(c) Três pessoas (da populaçãoconsiderada) foram escolhidas ao acaso e foram convidadas a jantar com Vladimir. Qual é a probabilidade de que somente duas delas possam degustar a gordurosa "gororoba"que Vladimir preparou (assuma que pessoas com elevado nível de colesterol não possam comer gorduras)?

Ex. 121. A quantidade de chuva por m^2 numa região segue aproximadamente uma distribuição normal, com média 100 ml e desvio padrão 20 ml.
(a) Qual é a probabilidade de que, em um ano, chova menos que 70 ml por m^2?
(b) Assumindo que as chuvas de anos diferentes são independentes, ache a probabilidade de que nos três próximos anos se tenha, exatamente, dois anos desfavoráveis ao cultivo de milho (um ano é desfavorável ao cultivo de milho se chover menos que 90 ml por m^2).
Dica: A resolução deste exercício é idêntica a do Exc. 120.

7.1.4 Exercícios cujas soluções usam propriedades de variáveis aleatórias normais

Exc. 122(a) A variável aleatória X tem distribuição $\mathcal{N}(2;(3)^2)$. Qual é a distribuição de $\frac{1}{3}X$?
(b) As variáveis aleatórias X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 são independentes e cada uma tem a distribuição $\mathcal{N}(1;(3)^2)$. Qual é a distribuição da variável aleatória $4X_0 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$?

Exc. 123(a) A variável aleatória X tem distribuição $\mathcal{N}(8;(2)^2)$. Qual é a distribuição de $\frac{1}{2}X$?
(b) As variáveis aleatórias X_0, X_1, X_2, X_3 são independentes e cada uma tem a distribuição $\mathcal{N}(1;(2)^2)$. Qual é a distribuição da variável aleatória $(X_1 + X_2 + X_3) - 3X_0$?

Exc. 124(a) A variável aleatória X tem distribuição $\mathcal{N}(1;(2)^2)$. Qual é a distribuição de $3X$?
(b) As variáveis aleatórias X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 são variáveis aleatórias independentes e cada uma tem a distribuição $\mathcal{N}(3;(4)^2)$. Qual é a distribuição de $4X_0 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$?

Exc. 125(a) A variável aleatória X tem distribuição $\mathcal{N}(3;(4)^2)$. Qual é a distribuição de $\frac{1}{3}X$?
(b) As variáveis aleatórias X_0, X_1, X_2 são independentes e cada uma tem a distribuição $\mathcal{N}(3;(5)^2)$. Qual é a distribuição da variável aleatória $(X_1 + X_2) - 2X_0$?

7.1.5 Exercícios do tipo "população segue, aproximadamente, uma normal", cujas soluções usam propriedades de variáveis aleatórias normais

Ex. 126. A capacidade máxima de um elevador é de 500kg. Se a distribuição X dos pesos dos usuários é suposta $\mathcal{N}(70;100)$, calcule:
(a) a probabilidade de 7 passageiros ultrapassarem este limite;
(b) a probabilidade de 6 passageiros ultrapassarem este limite.

Ex. 127. Cada seção usada para construção de um oleoduto tem um comprimento médio de 5 m e desvio padrão de 0,2 m.**Que frase é essa?! Loucura verbal! Além desse deslise, não há aqui a informação sobre a distribuição normal da população de seções!** O comprimento planejado de oleoduto em construção é 8 km.
(a) Se a firma construtora do oleoduto encomendar 1600 seções, qual a probabilidade de terem que comprar mais do que uma seção adicional (isto é, das 1600 seções somarem menos que 7995 m)?

(b) Qual a probabilidade do uso exato de 1599 seções, isto é, a soma das 1599 seções estar entre 8000 e 8005 m?

Ex. 128. A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com a média que pode ser regulada, e com o desvio padrão cujo valor é 10g para qualquer que seja o valor da média.
(a) Em quanto deve ser regulado o peso médio para que apenas 10% dos pacotes tenham menos de 500g?
(b) Com a máquina assim regulada, qual é a probabilidade de que o peso de um pacote exceda os 530g?
(c) Suponha que o valor da média foi regulado para 500g. Ache a probabilidade que o peso total de 4 pacotes seja menor que 1980g.
Obs.: *Este exercício está na presente seção graças ao seu item (c), pois a solução deste exige a aplicação das propriedades avançadas da distribuição normal.*

Ex. 129. As tábuas vendidas numa loja de materias de construção como "tábuas de 3 metros" têm seus comprimentos variádos. O fornecedor entregou um lote para a loja e aformou que o comprimento das tábuas do lote tem distribuição aproximadamente normal com mu=3 metros e sigma=0,05 metros. Use esta informação para responder nas seguintes perguntas.

(a) Se formos escolher ao acaso uma tábua do lote, qual a probabilidade de que esta esteja com o comprimento maior que 3,1 metros?

(b) A loja decidiu devolver ao fornecedor as 20Qual deve ser o comprimento máximo y para que exatamente 20estejam com seu comprimento menor que y?

7.2 Soluções dos exercícios do tema TCL

Aviso sobre a notação usada nas soluções a seguir: $\mu(X)$, μ_X são as notações para a esperança matemática (a média, em outras palavras) de variável aleatória X; $\sigma(X)$, σ_X são as notações para o desvio padrão de variável aleatória X

Solução ao Exc. 92.
Para a resolução do exercício sabemos que $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$ e que $\text{Var}[X] = n \cdot p \cdot q$, então:

(a) $\mathbb{E}[X] = 80 \cdot 0,3 = 24$, $\text{Var}[X] = 80 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 16,8$, portanto $\sigma(X) \approx 4,1$. Daí temos: $\mathbb{P}[[20 \leq X \leq 30]] = \mathbb{P}[[\frac{20-24}{4,1} \leq \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \leq \frac{30-24}{4,1}]] \approx \mathbb{P}[-0,97 \leq Z \leq 1,46]$, onde Z é normal padrão e com isso podemos usar os valores da tabela da normal padrão, então: $\mathbb{P}[-0,97 \leq Z \leq 1,46] = \mathbb{P}[Z \leq 1,46] - \mathbb{P}[Z \geq -0,97] = \mathbb{P}[Z \leq 1,46] - [1 - \mathbb{P}[Z \leq -0,97]] = 0,9270 - [1 - 0,8340] = 0,9270 - 0,166 = 0,761$

(b) $\mathbb{E}[X] = 100 \cdot 0,4 = 40$, $\text{Var}[X] = 100 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 24$, que nos leva a $\sigma(X) \approx 4,9$. Portanto, $\mathbb{P}[X \leq 40] = \mathbb{P}[(X - \mathbb{E}[X])/\sigma(X) \leq (40 - 40)/4,9] \approx \mathbb{P}[Z \leq 0]$, onde Z é normal padrão. Com isso dado que sabemos que a normal padrão é simétrica ao redor de sua média que é igual a zero e que sua área sob a curva é igual a 1, o que significa que acima do zero temos 0,5 e abaixo 0,5, então temos que: $\mathbb{P}[Z \leq 0] = 0,5$

(c) $\mathbb{E}[X] = 80 \cdot 0,7 = 56$, $\text{Var}[X] = 80 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 16,8$, que nos leva a $\sigma(X) \approx 4,1$. $\mathbb{P}[[50 \leq X \leq 60]] = \mathbb{P}[[\frac{50-56}{4,1} \leq \frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma(X)} \leq \frac{60-56}{4,1}]] \approx \mathbb{P}[-1,46 \leq Z \leq 0,97]$, onde Z é normal padrão e com isso podemos usar os valores da tabela da normal padrão, então: $\mathbb{P}[-1,46 \leq Z \leq 0,97] = \mathbb{P}[Z \leq 0,97] - \mathbb{P}[Z \geq -1,46] = \mathbb{P}[Z \leq 0,97] - [1 - \mathbb{P}[Z \leq 1,46]] = 0,8340 - [1 - 0,9279] = 0,8340 - 0,073 = 0,761$

(d) $\mathbb{E}[X] = 300 \cdot 0,25 = 75$, $\text{Var}[X] = 300 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 56,25$, que nos leva a $\sigma(X) \approx 7,5$. Portanto, $\mathbb{P}[X \geq 50] = \mathbb{P}[(X - \mathbb{E}[X])/\sigma(X) \geq (50 - 75)/7,5] \approx \mathbb{P}[Z \geq -3,33]$, onde Z é normal padrão. Como na tabela temos os valores de $\mathbb{P}[Z \leq z$, calculamos esta probabilidade pelo complementar em que obteremos a ponta da cauda, então teremos: $\mathbb{P}[Z \geq -3,33] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 3,33] = 1 - 0,9996 = 0,0004$

Solução ao Exc. 93. O número de moradores que são do eleitorado do candidato, dos 100 escolhidos, segue a distribuição $\text{Bin}(100; 0,3)$. Designamos este número por Y. Temos: $\mathbb{E}[Y] = 30$, $\text{Var}[Y] = 21$, $\sigma(Y) \approx 4,58$. Portanto

$$\mathbb{P}[Y \geq 40] = \mathbb{P}\left[\frac{Y - \mathbb{E}[Y]}{\sigma(Y)} \geq \frac{40 - 30}{4,58}\right] \approx \mathbb{P}[Z \geq 2,18],$$

onde Z é normal padrão. Como na tabela temos os valores de $\mathbb{P}[Z \leq z$, calculamos esta probabilidade pelo complementar em que obteremos a ponta da cauda, então teremos: $\mathbb{P}[Z \geq 2,18] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 2,18] = 1 - 0,9854 = 0,0146$

Solução ao Exc. 94. $Y \sim \text{Bin}(60; 0,25)$. Portanto, $\mathbb{E}[Y] = 60 \cdot 0,25 = 15$ e $\text{Var}[Y] = 60 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 11,25$, o que nos dá $\sigma(Y) \approx 3,35$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[15 \leq Y \leq 20] &= \mathbb{P}[(15 - 15)/3,35 \leq (Y - \mathbb{E}[Y])/\sigma(Y) \leq (20 - 15)/3,35] \\ &\approx \mathbb{P}[0 \leq Z \leq 1,5], \end{aligned}$$

onde Z é normal padrão e com isso podemos usar os valores da tabela da normal padrão e dado que já utilizamos o fato da simetria para sabermos o valor da probabilidade acima e abaixo de zero, então: $\mathbb{P}[0 \leq Z \leq 1,5] = \mathbb{P}[Z \leq 1,5] - \mathbb{P}[Z \geq 0] = 0,9332 - 0,5 = 0,4332$

A resposta ao item (b) segue do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} 0,10 &= \mathbb{P}[0 \le Y \le y] = \mathbb{P}[(0-15)/3,35 \le (Y - \mathbb{E}[Y])/\sigma(Y) \le (y-15)/3,35] \\ &\approx \mathbb{P}[-4,48 \le Z \le (y-15)/3,35] \end{aligned} \tag{7.1}$$

Observe que $4,48$ está fora da tabela da distribuição normal padrão. Por isto, no que se segue, assumimos que $\mathbb{P}[-4,48 \le Z \le 0] = \mathbb{P}[Z \le 0] = 0,5$ e $\mathbb{P}[0 \le Z \le 4,48] = \mathbb{P}[0 \le Z] = 0,5$.

Note que $(y-15)/3,35$ deve ser um número negativo, senão teríamos a última probabilidade em (7.1) da seguinte forma:

$$\mathbb{P}[-4,48 \le Z \le 0] + \mathbb{P}[0 \le Z \le (y-15)/3,35] \approx 0,5 + \text{algo positivo}$$

o que não poderia ser igual a $0,1$. Chamaremos $(y-15)/3,35$ por $-z$. Com isso a probabilidade em (7.1) é igual a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[z \le Z \le 4,48] &= \mathbb{P}[0 \le Z \le 4,48] - \mathbb{P}[0 \le Z \le z] \\ &\approx 0,5 - \mathbb{P}[0 \le Z \le z] \end{aligned}$$

Como tudo isso deve ter o valor numérico $0,1$, concluímos que $\mathbb{P}[0 \le Z \le z]$ deve ter valor $0,4$. Isso ocorre quando $z = 1,28$. Lembrando a definição de z, concluímos que $(y-15)/3,35 = -1,28$. Daí $y \approx 10,7$. Arredondando, obtemos a resposta 10 (note que o sentido da pergunta exige que o arrendondamento seja feito para 10 e não para 11).
Observação. Observe "$-$" em "$-1,28$" na penúltima equação. Alunos geralmente perdem este "$-$", e consequentemente, obtêm nota 0.

Solução ao Exc. 95. O raciocínio da solução é muito parecido com a do exercício sobre Papai Noel da lista sobre a probabilidade binomial. O número de pessoas que pedirão frango para almoço é uma variável aleatória Y que tem distribuição $\text{Bin}(100; 0,4)$ (pois são 100 pessoas, das quais cada uma pede frango com a probabilidade 0,4, e as preferências das pessoas são independentes. Conforme o enunciado, todas as pessoas serão satisfeitas, caso Y não for maior que a quantidade de pratos de frango disponível na lanchonete. Isso ocorre com a probabilidade $\mathbb{P}[Y \le 45]$. Para fazer a conta precisamos saber que: $\mathbb{E}[Y] = 100 \cdot 0,4 = 40$, $\text{Var}[Y] = 100 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 24$, e portanto, $\sigma(Y) \approx 4,9$. Agora vem o cálculo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y \le 45] &= \mathbb{P}[0 \le Y \le 45] \\ &= \mathbb{P}[(0-40)/4,9 \le (Y - \mathbb{E}[Y])/\sigma(Y) \le (45-40)/4,9] \\ &\approx \mathbb{P}[-8,16 \le Z \le 1,02] \approx 0,5 + \mathbb{P}[0 \le Z \le 1,02] = 0,5 + 0,3461 = 0,8461. \end{aligned}$$

Solução ao Exc 96. Y é o peso, em gramas, de um ovo. Denotado por uma variável aleatória Y, em que: $Y \sim N(30, 2^2)$.

Da mesma forma que no exercício anterior, podemos pensar de duas formas para encontrar o valor que queremos: queremos 60% dos ovos com pelo menos y de peso ou, podemos também observar os 40% dos ovos que tem peso no máximo y. Pensar dessa segunda forma ajuda a encontrar o valor da normal na tabela fornecida no material.

$$\mathbb{P}[Y \ge y] = 0,6 \quad \to \quad \mathbb{P}[Y \le y] = 0,4 \quad \to \quad \mathbb{P}\left[Z < \frac{y-30}{2}\right] = 0,4$$

Dessa forma pode-se encontrar na tabela da distribuição normal o valor, -0,25, que deixa 0,4 de probabilidade a esquerda deste valor, ou seja, procuramos o valor de probabilidade dentro da tabela e vemos a qual valor de z corresponde.

Com isso, observamos o valor de z que deixa 0,4 de probabilidade abaixo: $I\!P[(Z \leq z)] = 0,4$. No caso, o valor de z é -0,25, fazendo com que, possamos encontrar o valor limite y sabendo: $Z = \frac{y-30}{2}$

$$\frac{y-30}{2} = -0,25 \quad \rightarrow \quad y = 29,5.$$

Solução ao Exc. 97. **(a)** X: a altura, em centímetros, de um aluno da universidade, é denotado por X, em que: $X \sim N(170, 5^2)$.

Inicialmente precisa-se calcular a probabilidade de um aluno medir mais que 165cm:

$$I\!P[X \geq 165] = 1 - I\!P[X \leq 165] = 1 - I\!P\left[X \leq \frac{165-170}{5}\right] = 1 - I\!P[z \leq -1] = 0,8413$$

.
Y é o número de alunos que possuem altura superior a 165cm. Tem-se então que $Y \sim Bin(10.000, p = 0,8413)$. Assim, temos que o valor esperado da binomial é: $E[Y] = np = 8413$. Desta forma espera-se que 8413 alunos possuam mais de 165cm.

(b) Para encontrar o intervalo simétrico em torno da média que possui 75% das alturas, deve-se encontrar $x1$ e $x2$ de modo que, antes de $x1$ e depois de $x2$ tenhamos 12,5% das alturas. Assim:

$$\frac{x1-170}{5} = -1,15 \quad \rightarrow \quad x1 = 164,25, \qquad \frac{x2-170}{5} = 1,15 \quad \rightarrow \quad x2 = 175,75$$

Assim o intervalo central que contem 75% das alturas dos alunos é [164,25;175,75].

Solução ao Exc. 98.
(a) X sendo o Número de acidentes por dia em um certo hospital. $X \sim N(75, 8^2)$. Assim, calculamos para que pelo menos tenha-se um X que deixa uma certa área pintada à esquerda de 75 no gráfico da Normal, ou seja, que tenha:

$$I\!P[X \geq 75] = 1 - I\!P[X \leq 75] = 1 - I\!P\left[Z < \frac{75-75}{8}\right] = 1 - I\!P[X \leq 0] = 0,5$$

.
(b) Temos que considerar como a probabilidade de termos abaixo de 80 acidentados menos a probabilidade de termos abaixo de 60 pessoas acidentadas:

$$\begin{aligned} I\!P[60 \leq X \leq 80] &= I\!P[X \leq 80] - [1 - I\!P[X \leq 60]] \\ &= I\!P\left[Z \leq \frac{80-75}{8}\right] - \left[1 - I\!P\left[Z \leq \frac{60-75}{8}\right]\right] = 0,7017. \end{aligned}$$

Solução ao Exc. 99. X: o Peso, em kg, dos pacientes de uma clínica, tendo que a sua distribuição é: $X \sim N(130, 20^2)$.

Dessa forma, dado que queremos encontrar por exemplo os 25% mais pesados devemos encontrar na tabela da distribuição normal o valor que deixa 0,75 de probabilidade a esquerda deste valor, ou seja, procuramos o valor de probabilidade dentro da tabela e vemos a qual valor de z corresponde. E termos com este valor positivo e negativo, respectivamente, o limite dos 25% mais pesados e 25% mais leves. E com isso entramos o valor: $\pm 0,67$.

Pode se dizer que, as probabilidade para cada classificação são dadas por:
Limite x_1 para ser classificado como abaixo do peso:

$$\frac{x_1 - 130}{20} = -0,67 \quad \rightarrow \quad x1 = 116,6$$

Limite x_2 para ser classificado como acima do peso:

$$\frac{x_2 - 130}{20} = 0,67 \quad \rightarrow \quad x2 = 143,4$$

.

Solução ao Exc. 100.

(a) X: Número de pedidos de um produto por semana. Que tem uma distribuição: $X \sim N(125, 30^2)$. Assim, a probabilidade de termos vendas até 150 unidades é de:

$$I\!P[X \leq 150] = I\!P\left(Z < \frac{150 - 125}{30}\right) = I\!P[Z \leq 0,83] = 0,7967$$

.

(b) Queremos encontrar um x tal que 98% de todos os produtos sejam vendidos, ou seja, $I\!P[X \leq x] = I\!P[Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}] = 0,98$, então o valor de z que deixa 0,98 é 2,05, então:

$$\frac{x - 125}{30} = 2,05 \quad \rightarrow \quad x = 186,5$$

.

Assim deve-se ter um estoque de 187 produtos para que tem uma probabilidade de 0,98 de que os pedidos sejam atendidos.

(c) Para obtermos o valor do intervalo centrado na média que contenha 80% dos pedidos temos que encontrar os valores de x_1 e x_2 que delimitam os limites deste intervalo. Para ambos, basta olhar na tabela normal onde tem-se a probabilidade de um z ser menor que 0,1,usando para calcular x_1. A partir disso, usa-se o seu simétrico $(-z)$ para calcular o valor de x_2:

$$\frac{x1 - 125}{30} = -1,28 \quad \rightarrow \quad x1 = 86,6, \qquad \frac{x2 - 125}{30} = 1,28 \quad \rightarrow \quad x2 = 163,4$$

.

Solução ao Exc. 101. X: Peso, em kg, de coelhos criados numa granja. O qual tem uma distribuição: $X \sim N(5; 0,9^2)$. Graficamente, as classificações são seguidas de área mais escura para a área mais clara do gráfico, sendo a mais escura os 15% mais leves e a mais clara como os 15% mais pesados extras. Para a primeira região, encontra-se x_1, para os 15% mais leves:

$$\frac{x1 - 5}{0,9} = -1,04 \quad \rightarrow \quad x1 = 4,07$$

Para a segunda, x_2 para os 50% médios:

$$\frac{x2 - 5}{0,9} = 0,39 \quad \rightarrow \quad x2 = 5,35$$

E, finalmente, para a terceira, x_3 para os 15% mais pesados:

$$\frac{x3 - 5}{0,9} = 1,04 \quad \rightarrow \quad x3 = 5,93$$

.

Para a ultima classificação, não temos um x_4 que o limite.

Assim as categorias são: pequenos até 4,07kg, médios de 4,07kg até 5,35kg, e grandes, sendo de 5,35kg até 5,93kg e extras acima de 5,93kg.

Solução ao Exc. 102. (a) X é a precipitação pluviométrica mensal, em mm, no período de seca. $X \sim N(30, 16)$. Então, a probabilidade para estar entre os valores é: $\mathbb{P}[24 \leq X \leq 39] = \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{39-30}{4}\right] - \left(1 - \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{24-30}{4}\right]\right) = 0,921$.
(b) Tendo que o valor da normal que deixa 0,1 de probabilidade à esquerda é $z - 1,28$, tem-se: $\frac{x-30}{4} = -1,28 \quad \rightarrow \quad x = 24,87$.
(c) Dado que pela simetria teremos 10% acima e abaixo. Do item anterior temos:

$$x = x_1 = 24,87$$

E, para o outro valor (x_2)

$$\frac{x2 - 30}{4} = 1,28 \quad \rightarrow \quad x2 = 35,13$$

.

Solução ao Exc. 103. (a) X é o tempo de vida útil de uma lavadora. $X \sim N(31, 1, 2^2)$. Queremos encontrar a probabilidade de que apenas 15% das vendas originais exijam troca, ou seja, encontrar o valor z que nos dê 0,15 de probabilidade à esquerda: $\frac{x-3,1}{1,2} = -1,04 \quad \rightarrow \quad x = 1,85$ anos.
(b) Se a lavadora tiver uma garantia de um ano, ou seja nosso x seja igual a 1, então a probabilidade de troca será de: $\mathbb{P}\left[Z \leq \frac{1-3,1}{1,2}\right] = \mathbb{P}[Z \leq -1,75] = 0,0401$. Então a porcentagem de substituição dado que a garantia é de uma ano é de 4% das máquinas vendidas.

Solução ao Exc. 104. (a) X é o número de vezes que um adulto respira por minuto. $X \sim N(16, 4^2)$. Então, para sabermos o número de pessoas que tem a respiração maior que 22 dentre 100 pessoas é: - primeiro devemos encontrar a probabilidade de uma pessoa respirar mais que 22 vezes: $\mathbb{P}[X \geq 22] = \mathbb{P}\left[Z \geq \frac{22-16}{4}\right] = \mathbb{P}[Z \geq 1,5] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0667 \approx 0,07$. Mas o número esperado de pessoas dentro dessa amostra seguirá uma Binomial(100,0,07), com isso: $\mathbb{E}[X] = 100 \cdot 0,07 = 7$, 7 é o número esperado de pessoas dentre as 100 que tenha uma respiração maior que 22.
(b) Sabendo que um programa respiratório é ofertado para os 10% com respiração mais alta precisamos saber o ponto de corte para que uma pessoa seja encaixada neste grupo. Temos que encontrar o valor z que nos dê 0,90 de probabilidade à esquerda, com isso z=1,28, tem-se: $\frac{x-16}{4} = 1,28 \quad \rightarrow \quad x = 21,12$. A pessoa deve possuir uma respiração maior que 21 vezes por minuto.

Solução ao Exc. 105. (a) X: Tempo, em minutos, de atendimento. $X \sim N(8, 2^2)$. Logo, $P(X < 5) = P(Z < (5-8)/2) = P(Z < -3/2) = 0,0668$.
(b) $P(X > 9,5) = 1 - P(X < 9,5) = 1 - P(X < 3/4) = 0,2266$.
(c) $P(7 < X < 10) = P(X < 10) - P(X < 7) = P(X < 1) - P(X < -1/2) = 0,5328$.
(d) $P(X > x) = 0,75 \quad \rightarrow \quad P(X < x) = 0,25 \quad \rightarrow \quad \frac{x-8}{2} = -0,67 \quad \rightarrow \quad x = 6,65$, o que está ilustrado na figura abaixo:

Solução ao Exc. 106. (a-i) X: Concentração, em mg/15ml, de ácido xanturênico na urina de trabalhadores. $X \sim N(4,38; 1,15^2)$. Logo, $P(2,2 < X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2,2) = 0,3415$.
(a-ii) $P(X > 5,5) = 1 - P(X < 5,5) = 0,1650$.
(b) $P(X > x) = 0,8 \quad \rightarrow \quad P(X < x) = 0,2$.

$\frac{x-4,38}{1,15} = -0,84 \quad \rightarrow \quad x = 3,41.$

Solução ao Exc. 107. **(a)** X_{2000}: Nota dos alunos da USP no Provão em 2000. $X_{2000} \sim N(465, 100^2)$. $P(X_{2000} > 600) = 1 - P(X_{2000} < 600) = 0,0885$.
(b) X_{2001}: Nota dos alunos da USP no Provão em 2001. $X_{2001} \sim N(445, 100^2)$. $P(X_{2001} > 600) = 1 - P(X_{2001} < 600) = 0,0606$.
(c) $P(X_{2001} < x) = 0,2$.

$\frac{x-445}{100} = -0,84 \quad \rightarrow \quad x = 360,84, \qquad P(X_{2000} < 360,84) = 0,1488.$

Solução ao Exc. 108. (a) $\mathbb{P}[Y \leq 2,15]$,o onde $Y \sim \mathcal{N}(2; 0,01)$ (note: $\sigma_Y = 0,1$). Esta probabilidade é igual a $\mathbb{P}[Z \leq (2,15-2)/0,1] = 0,5 + 0,43319 = 0,93319$.
(b) A proporção é igual à probabilidade $\mathbb{P}[1,9 \leq Y \leq 2,2]$, onde Y é o mesmo do item (a) deste exercício. Tal probabilidade é igual a $pr[-1 \leq Z \leq 2] = 0,34134 + 0,47725 = 0,81859$.

Solução ao Exc. 109.
(a) $\mathbb{P}[Y \geq 200]$ onde $Y \sim \mathcal{N}(170; 6^2)$, a qual é igual a $\mathbb{P}[Z \geq (200-170)/6] = \mathbb{P}[Z \geq 5]$, que vale 0 devido à precisão da nossa tabela.
(b) Esta proporção é $\mathbb{P}[Y \leq 100] = \mathbb{P}[Z \leq -11,66]$, que também é 0 pela precisão fornecida por nossa tabela. Desculpem a escolha infeliz dos valores da esperança e da variância.

Solução ao Exc. 110. X: Notas de Estatística. Tem-se, segundo o enunciado, que $X \sim N(6,4; 0,8^2)$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 5) &= P\left(Z < \frac{5-6,4}{0,8}\right) = 0,0401 \\
P(5 < X \leq 7,5) &= P(X < 7,5) - P(X < 5) \\
&= P\left(Z < \frac{7,5-6,4}{0,8}\right) - P\left(Z < \frac{5-6,4}{0,8}\right) = 0,8754 \\
P(7,5 < X \leq 10) &= P\left(Z < \frac{10-6,4}{0,8}\right) - P\left(Z < \frac{7,5-6,4}{0,8}\right) = 0,0846
\end{aligned}
$$

Isto nos da que se Y_1 denota o número de alunos que obtiveram grau A, então $Y_1 \sim Binomial(80; 0,0846)$, e se Y_2 denota o número de alunos que obtiveram grau B, então $Y_2 \sim Binomial(80; 0,8754)$,e se Y_3 denota o número de alunos que obtiveram grau C, então $Y_3 \sim Binomial(80; 0,0401)$. Consequentemente, $E[Y_1] = 6,8$, $E[Y_2] = 70,0$ e $E[Y_3] = 3,2$.

Solução ao Exc. 111. **(a)** X: Tempo, em minutos, que um piloto demora para terminar um teste tem dist Normal dada por: $X \sim N(90, 20^2)$. Disso, para calcularmos o valor da probabilidade do piloto passar no teste é: $P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-90}{20}\right) = 0,3085$. Ou seja, em média, aproximadamente $\frac{1}{3}$ dos pilotos são aprovados, segundo a distribuição que os descreve.

Y sendo Número de pilotos que concluíram o teste em menos de 80 minutos. $Y \sim Binomial(10; 0,3085)$. Assim, calculando para pelo menos 3 sucessos: $P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \left(\binom{10}{2} \times (0,3085)^2(1-0,308\right.$
$0,6397$.
(b) W: Número de pilotos que concluíram o teste em menos de 80 minutos pode ser descrita como uma nova variável aleatória: $W \sim Binomial(65; 0,3085)$. Assim, a esperança disso ocorrer é: $E[W] = 65 \times 0,3085 = 20,05$.
(c)

Desta forma, calculamos por o valor direto da tabela normal de z que deixe 0,05 à esquerda. Assim: $\frac{x1-90}{20} = -1,64 \quad \rightarrow \quad x1 = 57,1$.

Solução ao Exc. 112. **(a)** X: Volume, em cm^3, de líquido em cada garrafa de refrigerante tem dist: $X \sim N(1000, 15^2)$. Assim, para sabermos a probabilidade de termos valores abaixo de $990cm^3$: $P(X < 990) = P\left(Z < \frac{990-1000}{15}\right) = 0,2525$.
(b) Para esse caso, tem-se que dois desvios padrões tem os o valor: $2 \times 15 = 30cm^3$. sabendo disso, os valores de cada limite para estar abaixo e acima desse intervalo são dados por x_1 e x_2. em que cada um é:
Abaixo: $x_1 = \mu - 2 \times \sigma = 1000 - 30 = 970$
Acima:$x_2 = 1000 + 30 = 1030$
Assim sendo: $P(970 < X < 1030) = P\left(\frac{970-1000}{15} < Z < \frac{1030-1000}{15}\right) = P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 2 \times P(Z < 2) - 1 = 0,9745$. Vale ressaltar que poderíamos calcular diretamente $P(-2 < Z < 2)$, pois Z possui distribuição normal padrão, a qual possui desvio padrão 1.
(c) Calculando a probabilidade de uma garrafa ter $P(X > 1003) = 1 - P(X < 1003) = 1-P\left(Z < \frac{1003-1000}{15}\right) = 0,4207$. Portanto, com Y denotando o número de garrafas que possuem um volume maior do que $1003cm^3$ tem-se que $Y \sim Binomial(10; 0,4207)$. Consequentemente, o valor da binomial calculada é dado por: $P(Y \leq 4) = 0,5803$.

Solução ao Exc. 113. X: Diâmetro interno, em mm, de um bocal. $X \sim N(13, 1)$. Então, $P(12 < X < 14) = P(X < 14) - P(X < 12) = P\left(Z < \frac{14-13}{1}\right) - P\left(Z < \frac{12-13}{1}\right) = 0,6826$, e $P(X < 12) = P\left(Z < \frac{12-13}{1}\right) = 0,1587$, e também, $P(X > 14) = 1 - P(X < 14) = 1 - P\left(Z < \frac{14-13}{1}\right) = 0,1587$. Isto, em forma de tabela dá:

L	R$-3	R$-2	R$20
P(L=l)	0,1587	0,1587	0,6826

Da tabela, segue-se, via a conta padrão para a esperança matemática, que $E[L] = 12,86$.

Solução ao Exc. 114. A probabilidade de uma esfera ser boa é

$$\begin{aligned} I\!P[0,6100 \leq X \leq 0,6180] &= I\!P\left[\frac{(0,6100-0,6140)}{0,0025} \leq \frac{(X-\mu_X)}{\sigma_X} \leq \frac{(0,6180-0,6140)}{0,0025}\right] \\ &= I\!P[-1,6 \leq Z \leq 1,6] = 2 \times 0,44520 = 0,8904 \end{aligned}$$

Uma esfera é recuperável se seu diâmetro não for muito pequeno, o que ocorre com a probabilidade

$$\begin{aligned} I\!P[0,6080 \leq X \leq 0,6100] &= \text{fazendo a normalização como feito acima} \\ &= I\!P[-2,4 \leq Z \leq -1,6] = 0,49180 - 0,44520 = 0,0466, \end{aligned}$$

ou se seu diâmetro não é muito grande, o que ocorre com a probabilidade

$$I\!P[0,6180 \leq X \leq 0,6200]$$

Fazendo a normalização da mesma fora como realizada anteriormente, esse cálculo fica:

$$I\!P[1,6 \leq Z \leq 2,4] = 0,49180 - 0,44520 = 0,0466$$

Combinando, temos que uma esfera é recuperável com a probabilidade de $2 \times 0,0466 = 0,0932$.

Uma esfera é defeituosa se seu diâmetro é muito pequeno, o que ocorre com a probabilidade

$$\begin{aligned} I\!P[X \leq 0,6080] &= \text{fazendo a normalização como feito acima} \\ &= I\!P[Z \leq -2,4] = 0,5 - 0,49180 = 0,0082 \end{aligned}$$

ou se seu diâmetro é muito grande, o que ocorre com a probabilidade

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\geq 0,6200] &= \text{fazendo a normalização como feito acima} \\ &= \mathbb{P}[Z \geq 2,4] = 0,5 - 0,49180 = 0,0082\end{aligned}$$

Combinando, temos que uma esfera é defeituosa com a probabilidade de $2 \times 0,0082 = 0,0164$.

Introduzimos a variável aleatória T que designa o lucro por esfera produzida. Conforme o enunciado, T assume os valores 0,10; 0,05 e -0,10, com as respectivas probabilidades já calculadas acima. Portanto,

$$\mathbb{E}[T] = 0,10 \times 0,8904 + 0,05 \times 0,0932 + (-0,05) \times 0,0164 = 0,09206 \tag{7.2}$$

Conforme a interpretação da esperança de uma variável aleatória, a qual discutimos no curso, podemos concluir que, para um número grande N de esferas produzidas, o lucro total é aproximadamente $0,09206 \times N$.

Solução ao Exc. 115. **(a)** X: Durabilidade, em km, do pneu Rodabem. $X \sim N(60.000, 8300^2)$. Portanto, $P(X < 48.000) = 0,0741$.
(b) $P(X < 45.000) = 0,0354$.
(c) $\frac{x1-60000}{8300} = -2,05 \quad \rightarrow \quad x1 = 42.953,88$, conforme ilustrado na figura abaixo:

(d) $\frac{x1-60000}{8300} = -1,44 \quad \rightarrow \quad x1 = 48.051,89$, $\quad \frac{x2-60000}{8300} = 1,44 \quad \rightarrow \quad x2 = 71.948,11$, conforme ilustrado na figura abaixo:

(e) Denotando pelo Y o número de pneus que precisarão ser trocados, temos que $Y \sim \mathit{Binomial}(4; 0,0354)$. Portanto, $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 0,1341$.

Solução ao Exc. 116. **(a)** A: Vida útil, em meses, de televisores do tipo A (comum). $A \sim N(9; 2^2) \Rightarrow P(A < 6) = 0,0668$. B: Vida útil, em meses, de televisores do tipo B (luxo). $B \sim N(12; 3^2) \Rightarrow P(B < 6) = 0,0227$.
(b)

L_A	R$-3.000	R$1.000
$P(L_A = l)$	0,0668	0,9332

L_B	R$-8.000	R$2.000
$P(L_B = l)$	0,0227	0,9773

Conforme os valores da tabela, temos que $\mathbb{E}[L_A] = R\$732,77$ e $\mathbb{E}[L_B] = R\$1.772,50$. o **(c)** A empresa deveria investir nos televisores de luxo.

Solução ao Exc. 117. **(a)** X: Tempo, em minutos, necessário para que estudantes terminem a prova. $X \sim N(90; 15^2)$. Portanto, $P(X < 80) = 0,2525$.
(b) $P(X > 120) = 1 - P(X < 120) = 0,0227$.
(c) $P(75 < X < 85) = P(X < 85) - P(X < 75) = 0,2108$.
(d)

$\frac{x-90}{15} = 2,05 \quad \rightarrow \quad x = 120,81$.
(e)

$\frac{x1-90}{15} = -1,04 \quad \rightarrow \quad x = 74,45, \qquad \frac{x2-90}{15} = 1,04 \quad \rightarrow \quad x = 105,55.$
(f) Com Y denotando o número de estudantes que completam a prova em menos de 80 minutos, temos que $Y \sim Binomial(5; 0,2525)$, de onde concluímos que $P(Y = 3) = 0,0899$.

Solução ao Exc. 118. **(a)** H: Peso, em kg, dos homens em uma população. $H \sim \mathcal{N}(75; 10^2)$. $\mathbb{P}(H > 65) = 1 - \mathbb{P}(H < 65) = 1 - \mathbb{P}\big(Z < \frac{65-75}{10}\big) = 1 - 0,1587 = 0,8413$.
(b) M: Peso, em kg, das mulheres em uma população. $M \sim \mathcal{N}(60; 4^2)$. $P(M > 65) = 1 - P(M < 65) = 0,1056$.
(c) Como vamos selecionar uma pessoa entre homens e mulheres, temos que levar em conta a quantidade de homens e mulheres na amostra:

$$X = \begin{cases} H, & \text{se a pessoa sorteada é homem, com probabilidade } 1/3; \\ M, & \text{se a pessoa sorteada é mulher, com probabilidade } 2/3 \end{cases}$$

Agora, seja Y o peso da pessoa selecionada. Assim, $P(Y > 65) = P(Y > 65|X = H)P(X = H) + P(M > 65|X = M)P(X = M)$. Os valores de cada dos termos foram calculados nos itens anteriores: $P(Y > 65|X = H) = 0,8413$, $P(M > 65|X = M) = 0,1056$. Portanto, $P(Y > 65) = 0,3509$.

Solução ao Exc. 119. **(a)** X: Tempo de cura, em dias, de pacientes sofrendo com certa moléstia. $X \sim \mathcal{N}(15, 2^2)$. $P(X > 17) = 1 - P(X < 17) = 1 - \mathbb{P}\big(Z < \frac{17-15}{2}\big) = 0,1586$.
(b) $P(X < 14) = \mathbb{P}\big(Z < \frac{14-15}{2}\big) = 0,3085$.
(c) Queremos encontrar o valor de X (tempo de cura) tal que 25% dos pacientes estejam recuperados. Ou seja, precisamos de um valor x tal que $\mathbb{P}(X < x) = 0,25$. Para tal, resolvemos $\mathbb{P}(\frac{X-15}{2} < \frac{x-15}{2}) = \mathbb{P}(Z < \frac{x-15}{2}) = 0,25$. Ao olhar a tabela, vemos que o valor que acumula probabilidade $0,25$ é $-0,67$. Portanto, $\frac{x-15}{2} = -0,67 \quad \rightarrow \quad x = 13,65$.
(d) $\Pr(X < 11) = \mathbb{P}(Z < \frac{11-15}{2}) = 0,0228$. Y: Número de pacientes que se curaram em menos de 11 dias. $Y \sim Binomial(n = 100; p = 0,0228)$. $E[Y] = 2,28$.

Solução ao Exc. 120. (a) $\mathbb{P}[Y \leq 183]$ onde $Y \sim \mathcal{N}(206; (60)^2)$. Esta probabilidade é igual a $\mathbb{P}[Z \leq \frac{183-206}{60}] = \mathbb{P}[Z \leq -0,38] = 0,35197$.
(b) $\mathbb{P}[Y \geq 350] = \mathbb{P}[Z \geq (350 - 206)/60] = \mathbb{P}[Z \geq 2,4] = 0,0082$.
(c) X: numero de pessoas que podem comer a "gororoba"gordurosa. A probabilidade de uma pessoa ter elevado índice de colesterol é $0,0082$, calculado no item anterior. Logo a probabilidade de uma pessoa não ter colesterol alto é $0,9918$. Portanto, $X \sim Binomial(n = 3, p = 0,9918)$. Estamos interessados em $\Pr(X = 2) = 0.0224$. Você pode estar surpreso com este valor baixo mas, nessa história, pelo fato da probabilidade de encontrar uma pessoa com alto nível de colesterol ser muito baixa, é muito provável que todos os três convidados de Vladimir possam degustar a deliciosa "gororoba".

Solução ao Exc. 121.
A quantidade de chuva na região é uma variável aleatória $X \sim \mathcal{N}(100, 20^2)$. **(a)** O valor de $P(X < 70)$ é dado por: $\frac{x-100}{20} = -1,5 = z$. Observando o valor na normal padrão Z: $\mathbb{P}[Z < -1,5] = 1 - \mathbb{P}[Z < 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0668$.
(b) Para isso, temos que calcular $\mathbb{P}[X < 90]$: $\mathbb{P}[X < 90] = \mathbb{P}[Z < \frac{90-100}{20}]$ que nos leva a: $Z = \frac{90-100}{20} = 0,5$. Buscando o valor na tabela da Z, calculamos a prob p por:

$$\mathbb{P}[Z < -0,5] = 1 - \mathbb{P}[Z < 0,5] = 0,3085$$

E disso, chamamos de Y uma v.a. em que $Y \sim Binomial(n = 3; p = 0,3085)$. Sabendo disso, calcula-se a probabilidade para termos *exatamente* 2 sucessos (não é menor ou igual que 2):

$$\mathbb{P}[Y = 2] = \binom{3}{2} \times 0,3085^2(1 - 0,3085) = 0,1974$$

.
Assim, a probabilidade de termos exatamente 2 dias desfavoráveis entre 3 é de 0,1974.

Solução ao Exc. 122. **(a)** As propriedades de variáveis aleatórias normais garantem que Y tem distribuição normal. Precisamos somente achar a média e a variância dessa.

$$E[Y] = E[\frac{1}{3}X] = \text{lembrando das propriedades de} E[\frac{1}{3}X] = \frac{1}{3}E[X] = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

.
E para a variância:

$$Var[Y] = Var[\frac{1}{3}X] = \text{com as propriedades de} Var[\frac{1}{3}X] = \frac{1}{9}Var[X] = \frac{9}{9} = 1$$

Sendo assim, $Y \sim \mathcal{N}(0,67;1)$.
(b) As propriedades de variáveis aleatórias normais garantem que $W = 4X_0-(X_1+X_2+X_3+X_4)$ tem distribuição normal. Precisamos somente achar a média e a variância dessa.

$$\begin{aligned} E[W] = & \ E[4X_0 - (X_1+X_2+X_3+X_4)] = 4E[X_0] - E\left(X_1+X_2+X_3+X_4\right) \\ = & \ 4E[X_0] - (E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]+E[X_4]) = 4 \times 1 - (1+1+1+1) = 0 \end{aligned}$$

No cálculo da variância é precisa tomar muito cuidado, pois a fórmula correta para a variância da diferença é assim:

$$\mathrm{Var}[A-B] = \mathrm{Var}[A] + \mathrm{Var}[B], \text{ onde } A \text{ e } B \text{ são variáveis aleatórias independentes} \tag{7.3}$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[W] = & \ \mathrm{Var}\left[4X_0 - (X_1+X_2+X_3+X_4)\right] \\ = & \ \mathrm{Var}\left[4X_0\right] + \mathrm{Var}\left(X_1+X_2+X_3+X_4\right) \\ = & \ 4^2\,\mathrm{Var}[X_0] + (\mathrm{Var}[X_1]+\mathrm{Var}[X_2]+\mathrm{Var}[X_3]+\mathrm{Var}[X_4]) \\ = & \ 16 \times 9 + (9+9+9+9) = 180 \end{aligned}$$

E assim, a variável aleatória W como dada acima tem: $W \sim \mathcal{N}(0;180)$.

Solução ao Exc. 123. **(a)** A solução para este é a mesma para o item (a) do Exc. 122, só que em vez de $\frac{1}{3}$, temos $\frac{1}{2}$ e $X \sim \mathcal{N}(8;(2)^2)$. Assim sendo, assumindo que a nova variável aleatória $V = \frac{1}{2}X$, tem-se

$$E[V] = E[\frac{1}{2}X] = \frac{1}{2}E[X] = \frac{8}{2} = 4$$

.
E para a variância:

$$Var[V] = Var[\frac{1}{2}X] = \frac{1}{4}Var[X] = \frac{4}{4} = 1$$

. Desta forma, a nova variável aleatória V tem distribuição Normal $\mathcal{N}(4;1)$ **(b)** Da mesma forma como no item **(b)** do Exercício anterior, mas com as distribuições diferentes, e que $A = (X_1+X_2+X_3) - 3X_0$. Considerando as distribuições separadas de $X_0, ..., X_4$ Tem-se: $E[A] = E[(X_1+X_2+X_3)-3X_0] = (E[X_1]+E[X_2]+E[X_3])-3E[X_0] = 3\times 1-3\times 1 = 0$. E para a variância: $Var[A] = Var[(X_1+X_2+X_3)-3X_0] = (Var[X_1]+Var[X_2]+Var[X_3]) + Var[-3X_0] = (Var[X_1]+Var[X_2]+Var[X_3]) + 9Var[X_0] = 3\times 4 + 9\times 4 = 48$, pois são v. a. independentes. Assim sendo, a nova variável aleatória A tem distribuição $\mathcal{N}(0;48)$.

Solução ao Exc. 124. **(a)** Novamente, como nos exercícios 123 e 122, a resolução é feita da mesma forma, considerando $B \sim \mathcal{N}(1;(2)^2)$ e $B = 3X$:

$$E[B] = E[3X] = 3E[X] = 3 \times 1 = 3$$

.
E a Variância:
$$Var[B] = Var[3X] = 9Var[X] = 9 \times 4 = 36 = (6)^2$$
. Tendo então a variável $B = 3X$ com distribuição $\mathcal{N}(3; (6)^2)$ **(b)** considerando então $C = 4X_0 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ e que $X_0, ..., X_4 \sim \mathcal{N}(3; (4)^2)$ Tem-se a resolução: $E[C] = E[4X_0 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)] = 4E[X_0] - (E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4]) = 4 \times 3 - (4 \times 3) = 0$.
E para a variância: $Var[C] = Var[4X_0 - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)] = 16Var[X_0] + (Var[X_1] + Var[X_2] + Var[$
$16 \times 16 + 4 \times 16 = 320$, pois são v. a. independentes. Portanto, $C \sim \mathcal{N}(0; 320)$.

Solução ao Exc. 125. (a) Da mesma forma que os anteriores mas com valores diferentes (considerando $D = \frac{1}{3}X$ e $X \sim \mathcal{N}(3; (4)^2)$):

$$E[D] = E[\frac{1}{3}X] = \frac{1}{3}E[X] = \frac{3}{3} = 0$$

E para a variância:

$$Var[Y] = Var[\frac{1}{3}X] = \text{com as propriedades de Var[X]} = \frac{1}{9}Var[X] = \frac{16}{9} \approx 1,78$$

Portanto a variável D segue a distribuição $D = \frac{1}{3}X \sim \mathcal{N}(0; 1,78)$. **(b)** Considerando o método aplicado aos exercícios acima nas suas respectivas letras (b), e que: X_0, X_1 e $X_2 \sim \mathcal{N}(3; (5)^2)$ e $F = (X_1 + X_2) - 2X_0$, temos: $E[F] = E[(X_1 + X_2) - 2X_0] = (E[X_1] + E[X_2]) - 2E[X_0] = (2 \times 3) - 2 \times 3 = 0$. E para a variância: $Var[F] = Var[(X_1 + X_2) - 2X_0] =$ v.a. independentes $= (Var[X_1] + Var[X_2]) + 4Var[X_0] = 2 \times 25 + 4 \times 25 = 150$. E com isso: $F \sim \mathcal{N}(0; 150)$.

Solução ao Exc. 126 apresentada na aula. A pergunta é uma maneira – talvez não muito boa – de dizer os seguinte:
se 7 pessoas foram retiradas ao acaso da população de usuários do elevador, qual é a probabilidade da soma de seus pesos ser > 500?

Para resolver o problema, precisa assumir que a retirada faz-se com a reposição. Isso garante que se
$$W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7$$
foram as variáveis aleatórias denotando os pesos das 7 pessoas, então elas sejam independentes e identicamente distribuídas.

Agora, a proximidade do histograma com a distribuição $\mathcal{N}(70, 100)$ permite substituir as W's por
$$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$$
onde as V's são independentes e cada uma tem distribuição $\mathcal{N}(70, 100)$. Observe que, diferentemente do que aconteceu no exercício anterior, agora cada V possui interpretação: é (aproximadamente) o peso de pessoa retirada ao acaso da população.

As propriedade de variáveis aleatórias normais citadas acima, garantem que

$$S = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 \sim \mathcal{N}(7 \times 70, 7 \times 100)$$

Então o problema reduz-se à conta $\mathbb{P}[S \geq 500]$ onde $S \sim \mathcal{N}(7 \times 70, 7 \times 100)$.

Eis a conta (abaixo, Z denomina a variável aleatória Normal Padrão):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S \geq 500] &= \mathbb{P}\left[Z \geq \frac{500 - 490}{\sqrt{700}}\right] \\ &= \mathbb{P}[Z \geq 0,3779] \\ &\approx \mathbb{P}[Z \geq 0,38] = 1 - \mathbb{P}[Z \leq 0,38] \end{aligned}$$

$$= \quad 1 - 0,6480 = 0,3520$$

Então, a resposta é que $0,3520$ é a probabilidade de 7 pessoas aleatoriamente escolhidas da população $\mathcal{N}(70,100)$ terem seus pesos, em somatória, maior que 500 kg.

Solução curta do Exc. 126. A propriedade na qual baseia este exercício é a seguinte: quando se somam variáveis aleatórias normais independentes, o resultado é uma variável aleatória normal, cuja esperança é a soma das esperanças das variáveis aleatórias da somatória, e a variância resultante é a soma das variâncias das variáveis aleatórias da somatória. Portanto, denotando por $X_1, X_2, \ldots, X_7$ os pesos de 7 usuários, concluímos que o peso acumulado deles é variável aleatória $Y = X_1 + \ldots + X_7 \sim \mathcal{N}(490;700)$. Daí: $I\!P[Y \geq 500] = I\!P[(Y-\mu_Y)/\sigma_Y \geq (500-490)/26,46] = I\!P[Z \geq 0,38] = 1 - 0,6480 \approx 0,35$. Esta é a resposta em (a). Já para (b), temos que a probabilidade em interesse é $I\!P[U \geq 500]$, onde $U \sim \mathcal{N}(420;600)$. Já que $\sqrt{600} \approx 24,5$, então esta probabilidade é igual $I\!P[Z \geq (500-420)/24,5] = I\!P[Z \geq 3,26] = 1 - 0,99944 = 0,00056$.

Solução ao Exc. 127. Aplicando as idéias da resolução do Ex. 126, temos as seguintes soluções:
(a) A distribuição do comprimento do oleoduto é $Y \sim \mathcal{N}(5 \times 1600;\, (0,2)^2 \times 1600)$. Daí $\sigma_Y = 40 \times 0,2 = 8$. Portanto, $I\!P[Y \leq 7995] = I\!P[Z \leq (7995-8000)/8] = I\!P[Z \leq -0,625] = 0,2659$.
(b) O comprimento é $U \sim \mathcal{N}(5 \times 1599;\, (0,2)^2 \times 1599)$. Com isso, temos $\sigma_U \approx 7,99$. A probabilidade pedida é $I\!P[8000 \leq U \leq 8005] = I\!P\big(\frac{8000-7995}{7{,}99} < Z < \frac{8005-7995}{7{,}99}\big) = I\!P[5/7,99 \leq Z \leq 10/7,99] = 0,8946 - 0,7343 = 0,16198$.

Solução ao Exc. 128. **(a)** X: Peso, em g, de um pacote empacotado por uma máquina. $X \sim \mathcal{N}(\mu, 10^2)$. $P(X < 500) = 0,1$. $\frac{500-\mu}{10} = -1,28 \quad \to \quad \mu = 512,81$.
(b) $X \sim \mathcal{N}(512,81;10^2)$. $I\!P(X > 600) = 1 - I\!P(X < 600) = 1 - I\!P\big(Z < \frac{530-512{,}81}{10}\big) = 1 - I\!P(Z < 1,719) \approx 1 - I\!P(Z < 1,72) = 1 - 0,9573$.
(c) X_i: Peso, em g, do i-ésimo pacote empacotado por uma máquina. $X_i \sim \mathcal{N}(500, 10^2)$. $Y = \sum_{i=1}^{4} X_i$: Peso, em g, de 4 pacotes empacotado por uma máquina. $Y \sim N(2000, 400)$. $I\!P(Y < 1980) = I\!P\big(Y < \frac{1980-2000}{20}\big) = I\!P(Z < -1) = 0,1586$.

Solução ao Exc. 129. **(a)** T: comprimento da tábua. $X \sim \mathcal{N}(3, (0{,}05)^2)$. $I\!P(X > 3,1) = I\!P\big(\frac{X-3}{0{,}05} > \frac{3{,}1-3}{0{,}05}\big) = I\!P\big(Z > \frac{0{,}1}{0{,}05}\big) = 1 - I\!P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.
(b) Colocar resposta aqui.