



PME 3543
Estruturas Mecânicas e de Veículos
P1 – 2020 - Gabarito
Prof. Leandro V. da S. Macedo

Para a barra de seção transversal circular ilustrada, discretizada conforme indicado, pede-se resolver utilizando o método matricial considerando-se matriz de rigidez de viga de 3 g.l.:

- escrever a matriz de rigidez local de cada elemento;
- escrever a matriz de transformação de coordenadas de cada elemento;
- escrever a matriz de rigidez global de cada elemento;
- escrever a matriz de rigidez global da estrutura;
- escrever o vetor de esforços externos;
- reduzir o sistema considerando as condições de contorno dadas;
- inverter a matriz de rigidez;
- obter os deslocamentos desconhecidos (nós 2 e 3);
- obter as forças de reação;
- obter os esforços no elemento 3;
- desenhar os diagramas de momento fletor, esforço cortante e esforço normal no elemento 3;
- obter o estado de tensões no ponto P, nó 3, pelo elemento 3 (vide seção transversal indicada), desprezando esforço cortante;
- obter as tensões principais neste ponto;
- obter a tensão equivalente neste ponto pelos critérios de Rankine, de Tresca e de Von Mises e verificar o dimensionamento.

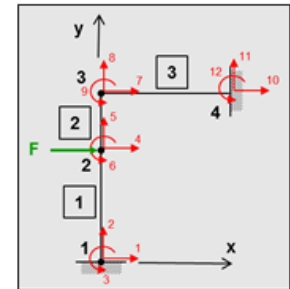
Gabarito para coordenada y da carga = 1000 mm.



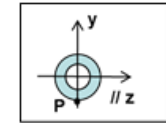
PME 3543 Estruturas Mecânicas e de Veículos
Primeira Prova – 10 de outubro de 2020

Para a barra de seção transversal circular ilustrada, discretizada conforme indicado, pede-se resolver utilizando o método matricial considerando-se matriz de rigidez de viga de 3 g.l.:

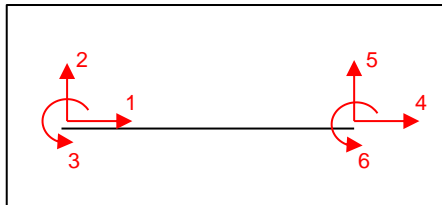
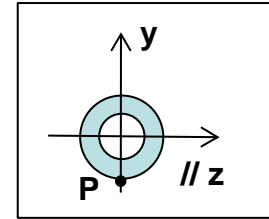
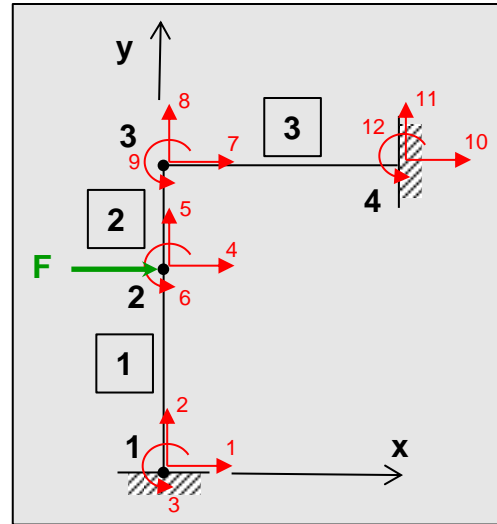
- escrever a matriz de rigidez local de cada elemento;
- escrever a matriz de transformação de coordenadas de cada elemento;
- escrever a matriz de rigidez global de cada elemento;
- escrever a matriz de rigidez global da estrutura;
- escrever o vetor de esforços externos;
- reduzir o sistema considerando as condições de contorno dadas;
- inverter a matriz de rigidez;
- obter os deslocamentos desconhecidos (nós 2 e 3);
- obter as forças de reação;
- obter os esforços no elemento 3;
- desenhar os diagramas de momento fletor, esforço cortante e esforço normal no elemento 3;
- obter o estado de tensões no ponto P, nó 3, pelo elemento 3 (vide seção transversal indicada), desprezando esforço cortante;
- obter as tensões principais neste ponto;
- obter a tensão equivalente neste ponto pelos critérios de Rankine, de Tresca e de Von Mises e verificar o dimensionamento.



nó	x [mm]	y [mm]	
1	0	0	
	0	200	Aline de Souza
	0	300	Daniel da Silva Cabelo Rubio
	0	400	Daniel Tonini Hyde
	0	500	Danielo Perez Reisetta
	0	600	Rebo Debiuzzi Orefice
	0	700	Reipe Chao Calixto de Jesus
	0	800	Reipe Ferreira Doria
	0	900	Gabriel Madeira Bisordi
	0	1000	Guilherme Menesico Kaufmann
2	0	1100	Gustavo Hideki Mazaki
	0	1200	Helton Masaro Nakasato Cavallaro
	0	1300	Jonas Machado Miguel
	0	1400	Urbanio Iturriza de Souza
	0	1500	Lucas Ferreira Amaral Massari
	0	1600	Munilo Perez de Beraldino
	0	1700	Pedro Gallo de Lima
	0	1800	Rafael Gutierrez Stuque
	0	1900	Rafaelia Piedra de Rokitzki
	0	2000	Renan Pedrosa de Silva
3	0	2100	Ricardo Goncalves Ruano
	0	2200	Valeria Oliveira Parizal Parini
	0	2300	Victor Lyra Nambu
	0	2400	Victor Scavone
	0	2600	Victor Yong Bardini Pak
	0	3000	
	1500	3000	
	1500	3000	



F	5000	[N]
E	210000	[MPa]
Poisson	0,3	
ϕ_{ext}	30	[mm]
A	700	[mm ²]
I	40000	[mm ⁴]
S _y	480	[MPa]
Aço	0,15	



3DOF Beam Element matrix

$$k^b = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_e^3} & \frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} & 0 & -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} \\ -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} & 0 & \frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_e^2} & \frac{2EI}{l_e} & 0 & -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

1 2 3 4 5 6



Gabarito para coordenada y da carga = 1000 mm.

	Matrizes de rigidez locais						Matrizes de Transformação de coordenadas						Matrizes de Transformação de coordenadas Transposta					
	1	2	3	4	5	6												
1	147000	0	0	-147000	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0	0	0	0
2	0	100,8	50400	0	-100,8	50400	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0
3	0	50400	33600000	0	-50400	16800000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	-147000	0	0	147000	0	0	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0
5	0	-100,8	-50400	0	100,8	-50400	0	0	0	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0
6	0	50400	16800000	0	-50400	33600000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	7	8	9	10	11	12												
7	73500	0	0	-73500	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0	0	0	0
8	0	12,6	12600	0	-12,6	12600	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0
9	0	12600	16800000	0	-12600	8400000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	-73500	0	0	73500	0	0	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	-1,00	0
11	0	-12,6	-12600	0	12,6	-12600	0	0	0	-1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0
12	0	12600	8400000	0	-12600	16800000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	13	14	15	16	17	18												
13	98000	0	0	-98000	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0
14	0	29,86667	22400	0	-29,8667	22400	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0
15	0	22400	22400000	0	-22400	11200000	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
16	-98000	0	0	98000	0	0	0	0	0	1,00	0,00	0	0	0	0	1,00	0,00	0
17	0	-29,8667	-22400	0	29,86667	-22400	0	0	0	0,00	1,00	0	0	0	0	0,00	1,00	0
18	0	22400	11200000	0	-22400	22400000	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1



[K][T]					
9,00E-12	1,47E+05	0,00E+00	-9,00E-12	-1,47E+05	0,00E+00
-1,01E+02	6,17E-15	5,04E+04	1,01E+02	-6,17E-15	5,04E+04
-5,04E+04	3,09E-12	3,36E+07	5,04E+04	-3,09E-12	1,68E+07
-9,00E-12	-1,47E+05	0,00E+00	9,00E-12	1,47E+05	0,00E+00
1,01E+02	-6,17E-15	-5,04E+04	-1,01E+02	6,17E-15	-5,04E+04
-5,04E+04	3,09E-12	1,68E+07	5,04E+04	-3,09E-12	3,36E+07
4,50E-12	7,35E+04	0,00E+00	-4,50E-12	-7,35E+04	0,00E+00
-1,26E+01	7,72E-16	1,26E+04	1,26E+01	-7,72E-16	1,26E+04
-1,26E+04	7,72E-13	1,68E+07	1,26E+04	-7,72E-13	8,40E+06
-4,50E-12	-7,35E+04	0,00E+00	4,50E-12	7,35E+04	0,00E+00
1,26E+01	-7,72E-16	-1,26E+04	-1,26E+01	7,72E-16	-1,26E+04
-1,26E+04	7,72E-13	8,40E+06	1,26E+04	-7,72E-13	1,68E+07
9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	2,99E+01	2,24E+04	0,00E+00	-2,99E+01	2,24E+04
0,00E+00	2,24E+04	2,24E+07	0,00E+00	-2,24E+04	1,12E+07
-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	-2,99E+01	-2,24E+04	0,00E+00	2,99E+01	-2,24E+04
0,00E+00	2,24E+04	1,12E+07	0,00E+00	-2,24E+04	2,24E+07



[T] ^T [K][T]					
1,01E+02	9,00E-12	-5,04E+04	-1,01E+02	-9,00E-12	-5,04E+04
9,00E-12	1,47E+05	3,09E-12	-9,00E-12	-1,47E+05	3,09E-12
-5,04E+04	3,09E-12	3,36E+07	5,04E+04	-3,09E-12	1,68E+07
-1,01E+02	-9,00E-12	5,04E+04	1,01E+02	9,00E-12	5,04E+04
-9,00E-12	-1,47E+05	-3,09E-12	9,00E-12	1,47E+05	-3,09E-12
-5,04E+04	3,09E-12	1,68E+07	5,04E+04	-3,09E-12	3,36E+07
1,26E+01	4,50E-12	-1,26E+04	-1,26E+01	-4,50E-12	-1,26E+04
4,50E-12	7,35E+04	7,72E-13	-4,50E-12	-7,35E+04	7,72E-13
-1,26E+04	7,72E-13	1,68E+07	1,26E+04	-7,72E-13	8,40E+06
-1,26E+01	-4,50E-12	1,26E+04	1,26E+01	4,50E-12	1,26E+04
-4,50E-12	-7,35E+04	-7,72E-13	4,50E-12	7,35E+04	-7,72E-13
-1,26E+04	7,72E-13	8,40E+06	1,26E+04	-7,72E-13	1,68E+07
9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	2,99E+01	2,24E+04	0,00E+00	-2,99E+01	2,24E+04
0,00E+00	2,24E+04	2,24E+07	0,00E+00	-2,24E+04	1,12E+07
-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
0,00E+00	-2,99E+01	-2,24E+04	0,00E+00	2,99E+01	-2,24E+04
0,00E+00	2,24E+04	1,12E+07	0,00E+00	-2,24E+04	2,24E+07



Matriz de Rigidez

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,01E+02	9,00E-12	-5,04E+04	-1,01E+02	-9,00E-12	-5,04E+04	0	0	0	0	0	0
2	9,00E-12	1,47E+05	3,09E-12	-9,00E-12	-1,47E+05	3,09E-12	0	0	0	0	0	0
3	-5,04E+04	3,09E-12	3,36E+07	5,04E+04	-3,09E-12	1,68E+07	0	0	0	0	0	0
4	-1,01E+02	-9,00E-12	5,04E+04	1,13E+02	1,35E-11	3,78E+04	-1,26E+01	-4,50E-12	-1,26E+04	0	0	0
5	-9,00E-12	-1,47E+05	-3,09E-12	1,35E-11	2,21E+05	-2,32E-12	-4,50E-12	-7,35E+04	7,72E-13	0	0	0
6	-5,04E+04	3,09E-12	1,68E+07	3,78E+04	-2,32E-12	5,04E+07	1,26E+04	-7,72E-13	8,40E+06	0	0	0
7	0	0	0	-1,26E+01	-4,50E-12	1,26E+04	9,80E+04	4,50E-12	1,26E+04	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
8	0	0	0	-4,50E-12	-7,35E+04	-7,72E-13	4,50E-12	7,35E+04	2,24E+04	0,00E+00	-2,99E+01	2,24E+04
9	0	0	0	-1,26E+04	7,72E-13	8,40E+06	1,26E+04	2,24E+04	3,92E+07	0,00E+00	-2,24E+04	1,12E+07
10	0	0	0	0	0	0	-9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00	9,80E+04	0,00E+00	0,00E+00
11	0	0	0	0	0	0	0,00E+00	-2,99E+01	-2,24E+04	0,00E+00	2,99E+01	-2,24E+04
12	0	0	0	0	0	0	0,00E+00	2,24E+04	1,12E+07	0,00E+00	-2,24E+04	2,24E+07

Deslocamentos

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F_{ext}\}$$

Matriz de Rigidez Reduzida e Invertida

	4	5	6	7	8	9
4	1,32E-02	-1,01E-06	-1,10E-05	2,27E-06	-3,02E-06	6,62E-06
5	-1,01E-06	6,80E-06	1,51E-09	2,59E-10	6,80E-06	-4,53E-09
6	-1,10E-05	1,51E-09	2,98E-08	-3,97E-09	4,53E-09	-9,92E-09
7	2,27E-06	2,59E-10	-3,97E-09	1,02E-05	7,77E-10	-1,70E-09
8	-3,02E-06	6,80E-06	4,53E-09	7,77E-10	2,04E-05	-1,36E-08
9	6,62E-06	-4,53E-09	-9,92E-09	-1,70E-09	-1,36E-08	2,98E-08

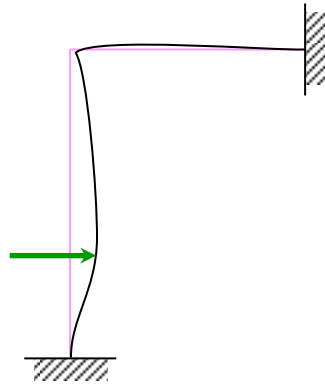
Carga
5000
0
0
0
0
0

4	6,61E+01
5	-5,04E-03
6	-5,51E-02
7	1,13E-02
8	-1,51E-02
9	3,31E-02

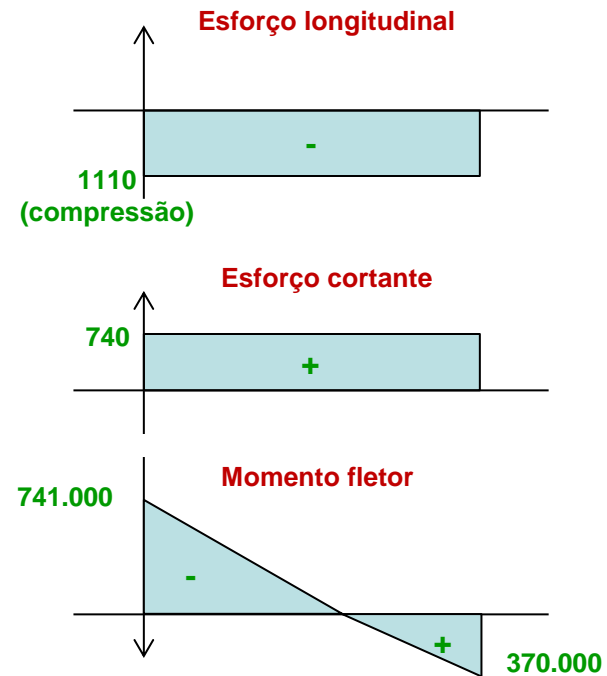
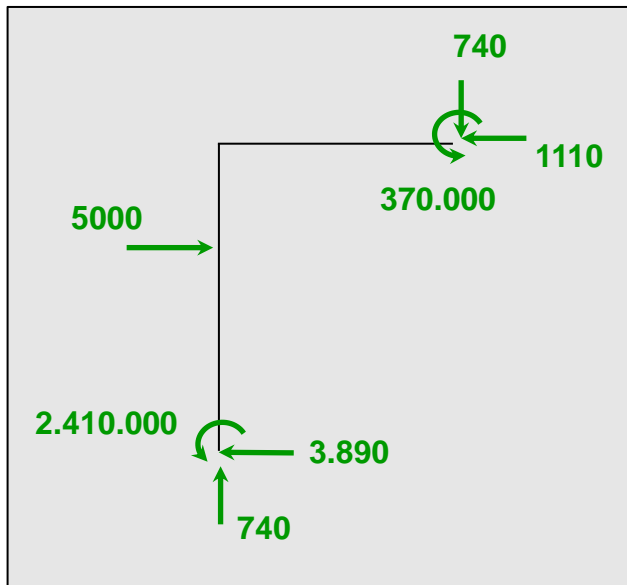
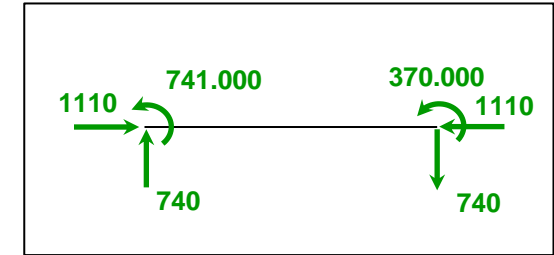


$$\{F_{ext}\} = [K]\{u\}$$

	Deslocamentos	Reações
1	0	-3,89E+03
2	0	7,40E+02
3	0	2,41E+06
4	6,61E+01	5,00E+03
5	-5,04E-03	2,55E-14
6	-5,51E-02	-5,24E-10
7	1,13E-02	5,68E-13
8	-1,51E-02	0,00E+00
9	3,31E-02	-2,33E-10
10	0	-1,11E+03
11	0	-7,40E+02
12	0	3,70E+05



	desl. coords. locais elemento 3	esforços coords. locais elemento 3
7	1,13E-02	1,11E+03
8	-1,51E-02	7,40E+02
9	3,31E-02	7,41E+05
10	0,00E+00	-1,11E+03
11	0,00E+00	-7,40E+02
12	0,00E+00	3,70E+05

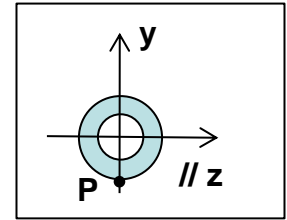




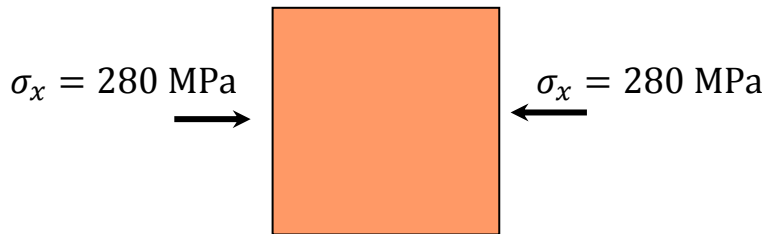
Analisando a seção transversal no nó 3, pelo elemento 3, no ponto P:

$$\sigma_{flexão} = \frac{M \frac{\phi}{2}}{I} = \frac{741000.15}{40000} = 278 \text{ MPa (em compressão no ponto P)}$$

$$\sigma_{longitudinal} = \frac{N}{A} = \frac{1110}{700} = 1,59 \text{ MPa (em compressão ao longo de todo o trecho)}$$



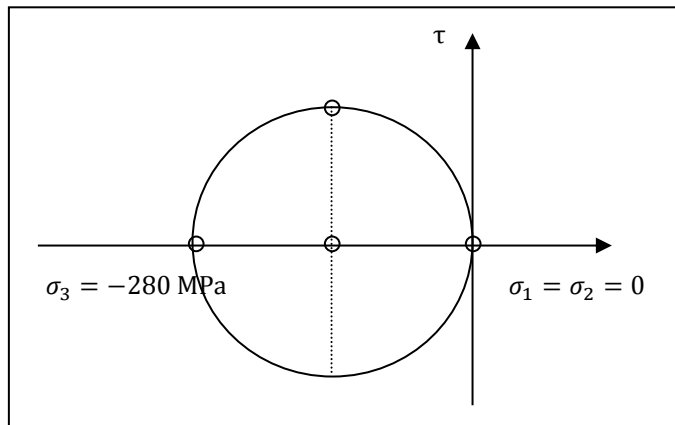
Como proposto no enunciado, desconsiderando a tensão de cisalhamento causada pelo efeito cortante:



Rankine: $\sigma_{eq} = -280 \text{ MPa}$

Tresca: $\sigma_{eq} = 280 \text{ MPa}$

Von Mises: $\sigma_{eq} = 280 \text{ MPa}$



Material é dúctil ($A_{80} = 15\%$), critérios de Tresca e Von Mises seriam adequados:

Neste ponto $\sigma_{eq} < S_y \Rightarrow OK!$

Todavia o ponto P não é o mais solicitado da estrutura!
O ponto mais solicitado está localizado no engaste do nó 1 onde o momento fletor é máximo.