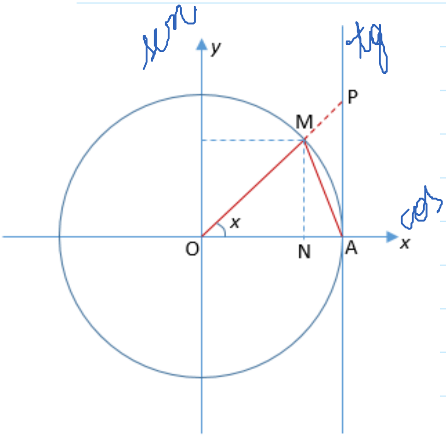
2.1.3 Limites fundamentais

Teorema 2.6 Limite trigonométrico fundamental.

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Demonstração:



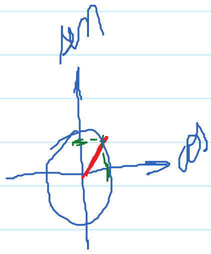
$\overline{OA} = 1$

$A = \pi r^2$

$A = \frac{x \pi r^2}{2\pi}$

Área Δ OMA $<$ Área OMA $<$ Área Δ OPA

$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{MN}}{\cancel{2}} < \frac{x \cancel{\pi} \overline{OA}^2}{\cancel{2\pi}} < \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AP}}{\cancel{2}}$ 1   1   1



$\overline{MN} < x < \overline{AP}$

$\text{sen}\, x < x < \text{tg}\, x$

$\text{sen}\, x < x < \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

$2 < 3$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

1 $\frac{\cancel{\text{sen}\, x}}{\cancel{\text{sen}\, x}} < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{\cancel{\text{sen}\, x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\text{sen}\, x}}$

$1 < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x}$ inverter as frações e as desigualdades

$\frac{\cos x}{1} < \frac{\text{sen}\, x}{x} < 1$

$x \to 0$

$\cos x \to 1$

$$\boxed{\lim_{x \mapsto 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1}$$

$1 < \frac{\text{sen}\, x}{x} < 1$

Exemplo 2.16 Calcular os limites:

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\text{sen}(2x)}{x}$ $\quad a = 2x \to x = \dfrac{a}{2}$

$x \to 0$
$a \to 0$

$$\lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{\frac{a}{2}} = \lim_{a\to 0} \sin a \cdot \frac{2}{a} = 2 \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a}$$

1

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

ou

1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} \cdot \frac{2}{2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\text{tag}(x)}{x}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

1 $\quad$ 1

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Teorema 2.7 Limite exponencial fundamental. $\quad t = \dfrac{1}{x} \to x = \dfrac{1}{t}$

$$\lim_{x\mapsto \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\to \lim\limits_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$

ou

$$\lim_{u\mapsto 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Exemplo 2.17 Calcular os limites:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ $= \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right]^3$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

$$= \left[\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3$$

$$= [e]^3 = e^3$$

b. $\lim (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

b. $\lim_{x \mapsto 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

Seja $u = 2x \to x = \frac{u}{2} \to \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{u/2} = 1 \cdot \frac{2}{u}$

$\begin{cases} x \to 0 \\ u \to 0 \end{cases}$

$$\lim_{u \to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}} = \lim_{u \to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^2 = \Big[\underbrace{\lim_{u \to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}}_{e}\Big]^2 = e^2$$

2.2 Continuidade

Definição 2.10 Diz-se que uma função f é contínua no ponto $x = a$ se e somente se:

i. Existe $f(a)$;

ii. Existe $\lim_{x \mapsto a} f(x)$; $\longrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

iii. $\lim_{x \mapsto a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 2.18 Verificar se a função: $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ é contínua no ponto $x = 2$.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq -2\}$

denominador $\neq 0$

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \sqrt{4}$

$x \neq \pm 2$

i) $\exists\, f(2) = ?$ não

$\nexists\, f(2)$ ∴ $f(x)$ não é contínua em $x = 2$

Domínios da função:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$D(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{5}{x-1}$ $x \neq 1$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

Exemplo 2.19 Verificar se a função:

$$f(x) : \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1; \\ -2x+4 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$

é contínua no ponto $x = 1$.

i) $f(1) = -2(1) + 4 = 2$ $\qquad \underbrace{f(1) = 2}$ $\rightarrow$ existe

ii) $\exists \lim_{x \to 1} f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} -2x+4 = 2$

$\lim_{x \to 1^-} x+1 = 2$

limites laterais iguais

$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = 2$

iii) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$2 = 2$ ✓

$\therefore f(x)$ é contínua para $x = 1$

Observações

i. Quando uma função $y = f(x)$ é contínua em todos os pontos de um intervalo (a, b) então ela é absolutamente contínua em (a, b);

ii. Em geral, as funções racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em seus domínios;

iii. Se f e g são funções contínuas em $x = a$ então as funções $f \pm g$, $f.g$, f/g também serão contínuas em $x = a$.