

FÍSICA IV

# EQUAÇÕES DE MAXWELL E RADIAÇÃO ELETROMAG- NÉTICA

*Antes de Maxwell*

Nas últimas décadas do Século XVIII e nas primeiras do Século XIX, as descobertas de Coulomb, Ørsted, Ampère e Faraday firmaram o eletromagnetismo como ciência. Em notação matemática moderna, o conhecimento fundamental acumulado nesse período pode ser resumido por quatro equações diferenciais: a equação de Poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

a lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

a lei de Gauss para o magnetismo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

e a lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (4)$$

Na Eq. (1),  $\rho$  é a densidade de carga elétrica e

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (5)$$

e, na Eq. (4),  $\vec{j}$  é a densidade de corrente elétrica. A densidade de corrente e a densidade de carga são ligadas pela equação da continuidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6)$$

O vetor de deslocamento  $\vec{D}$  e o campo elétrico  $\vec{E}$  se relacionam pela igualdade

$$\vec{D} = \kappa \vec{E}, \quad (7)$$

onde  $\kappa$  é a constante dielétrica, que depende do material onde se medem os campos. No vácuo,  $\kappa = 1$ .

Analogamente, os campos  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  se relacionam pela igualdade

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (8)$$

onde a permeabilidade magnética  $\mu$  também depende do material. A permeabilidade do vácuo é

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}. \quad (9)$$

Na década de 1860, o escocês James Clerk Maxwell, com base em análise teórica, concluiu que a Eq. (4) era incompatível com a equação da continuidade. Era necessária, portanto, uma correção.

### *A correção de Maxwell*

Para ver que a Eq. (4) está em conflito com a equação da continuidade, precisamos apenas tomar o divergente nos dois lados da igualdade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (10)$$

Uma vez que o divergente do rotacional de qualquer vetor é sempre zero, a Eq. (10) indica que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ , em conflito com a Eq. (6). Nas experiências de Ørsted e Ampère, feitas em circuitos de corrente contínua, sem acúmulo de carga, o conflito não se tornara aparente. Como veremos mais adiante, porém, a incompatibilidade salta aos olhos em circuitos com capacitores que se carregam ou descarregam.

Para compatibilizar a lei de Ampère com a equação da continuidade, o mais simples é somar ao lado direito da Eq. (4) uma correção  $\vec{X}$ , que deve ser escolhida de forma que a divergência do lado direito seja zero. Em símbolos, escrevemos a expressão

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{X} \quad (11)$$

e exigimos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{X} = 0. \quad (12)$$

A Eq. (6), da continuidade, nos diz que o primeiro termo à direita na Eq. (12) é igual a  $-\partial\rho/\partial t$ . Podemos, assim, reescrever esta última equação na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (13)$$

A Eq. (1), de Poisson, mostra que a densidade  $\rho$  é proporcional à divergência do campo de deslocamento  $\vec{D}$ . Com isso, a Eq. (13) pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t}, \quad (14)$$

ou ainda

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \quad (15)$$

Podemos assim ver que a definição

$$\vec{X} \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16)$$

garante que a igualdade (12) seja satisfeita, ou seja, torna a lei de Ampère corrigida, Eq. (11), compatível com a equação da continuidade.

A partir de hoje, portanto, no lugar da Eq. (4), passaremos a trabalhar com a lei de Ampère corrigida:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (17)$$

O segundo termo no lado direito da Eq. (17), identificado pela primeira vez por Maxwell, em 1861, é conhecido como *densidade de corrente de deslocamento*. A corrente de deslocamento se anula nos pontos em que o campo de deslocamento (ou o campo elétrico) é constante. Quando o campo varia com o tempo, porém, ele contribui para o campo magnético em pé de igualdade com a corrente gerada pelo movimento dos portadores. Vejamos um exemplo.

### Corrente no interior de um capacitor

No circuito da figura 1, a força eletromotriz é  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ , onde  $\mathcal{E}_0 = 1 \text{ V}$  e  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ . Como o resistor, o indutor e o capacitor estão dispostos em série, a impedância é a soma  $Z = R + i\omega L - 1/(i\omega C)$ . Com  $\omega = 10$ , as impedâncias do capacitor e do indutor se cancelam. Resulta que  $Z = 20 \Omega$ , e a corrente complexa é

$$u = \frac{\exp(10it)}{20}. \quad (18)$$

A corrente real  $I = \text{Re } u$  é, portanto,

$$I = \frac{1}{20} \cos(10t). \quad (19)$$

A partir da Eq. (18), podemos encontrar a carga complexa  $z$  no capacitor. A equação equivalente a  $I = dQ/dt$  no plano complexo é  $u = dz/dt$ , ou seja  $u = 10iz$ , visto que tanto  $u$  como  $z$  são proporcionais a  $\exp(10it)$ .

Assim, da Eq. (18) podemos extrair a carga complexa no capacitor:

$$z = \frac{\exp(10it)}{200i} \quad (20)$$

e, em seguida, calcular a carga real  $Q = \text{Re } z$ :

$$Q = \frac{1}{200} \text{sen}(10t). \quad (21)$$

A corrente  $I$  descreve o transporte de carga através do indutor, do resistor e do gerador de tensão. No interior do capacitor, entretanto, inexistente transporte. Como pode a corrente desaparecer numa placa do capacitor e reaparecer na outra?

Podemos responder intuitivamente a essa pergunta. A corrente é alternada. Nos instantes em que circula no sentido horário, a corrente carrega a placa da esquerda do capacitor. O acúmulo de carga

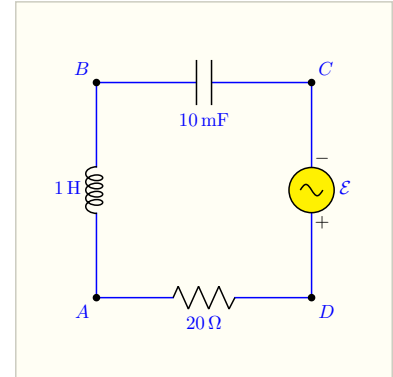


Figura 1: Circuito sujeito a tensão alternada  $\mathcal{E} = \cos(10t)$ , em Volts. A variação do campo  $\vec{D}$  gera uma corrente de deslocamento entre as placas do capacitor.

na placa esquerda gera um campo elétrico no interior do capacitor. O campo elétrico carrega negativamente a placa direita; para que isso possa acontecer, é necessário que haja transporte de carga da placa direita para o gerador. Dessa forma, o campo elétrico gerado no interior do capacitor permite que a corrente salte da placa da esquerda para a placa da direita sem passar pelo espaço vazio ou preenchido com material isolante no interior do capacitor.

Essa noção intuitiva é descrita matematicamente pela corrente de deslocamento. Assim como a corrente  $I$  através de uma superfície é o fluxo da densidade de corrente  $\vec{j}$  através da superfície, a corrente de deslocamento  $I_d$  é o fluxo da densidade de corrente de deslocamento  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \partial D / \partial t$  através da superfície. Se a área das placas do capacitor for  $A$ , a corrente de deslocamento através do dispositivo será

$$I_d = \epsilon_0 \frac{dD}{dt} A. \quad (22)$$

No lado direito, a derivada é ordinária, e não parcial, porque o vetor deslocamento depende apenas do tempo.

O campo  $\vec{D}$  é produzido pelas cargas  $Q$ , na placa esquerda, e  $-Q$ , na placa direita, do capacitor. Nos capacitores, a separação entre as placas é muito menor do que as dimensões das placas. Nessa geometria, é boa aproximação calcular o campo como se fosse produzido por planos infinitos com densidade superficial de carga  $\sigma = Q/A$ . A eletrostática nos diz, então, que o módulo do campo é

$$D = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}. \quad (23)$$

Substituído esse resultado no lugar de  $D$  no lado direito da Eq. (22), a área e  $\epsilon_0$  se cancelam, e encontramos a corrente de deslocamento

$$I_d = \frac{dQ}{dt}, \quad (24)$$

ou, com a carga dada pela Eq. (21),

$$I_d = \frac{1}{20} \cos(10t). \quad (25)$$

Compare agora os lados direitos das Eqs. (19) e (25). A corrente de deslocamento  $I_d$ , através do capacitor, é igual ao fluxo de carga  $I$ , através dos demais elementos do circuito.

### *Campo magnético devido a uma corrente de deslocamento*

O resultado que acabamos de encontrar, na Seção *Corrente no interior de um capacitor*, é bem satisfatório. Pode dar a impressão de que a corrente de deslocamento é um artifício matemático especialmente projetado para descrever o salto do fluxo de carga entre uma placa e outra

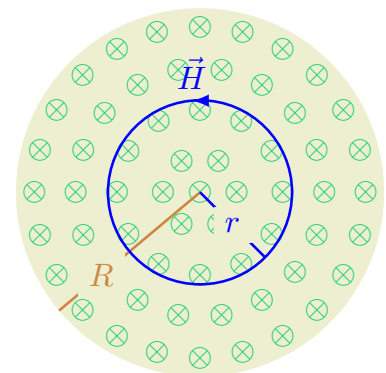


Figura 2: Interior de um capacitor com placas planas circulares de raio  $R$ , visto ao longo do eixo do capacitor. Os símbolos  $\otimes$  indicam a densidade de corrente de deslocamento. A circunferência azul mostra uma das linhas do campo magnético  $\vec{H}$  gerado pela corrente de deslocamento.

do capacitor, mas essa interpretação é incorreta. Para mostrar que a corrente de deslocamento tem realidade física, mostraremos nesta seção que ela gera um campo magnético no interior do capacitor.

Para facilitar, suporemos que o capacitor no circuito da figura 1 é circular, constituído por duas placas planas redondas, de raio  $R$ . A figura 2 mostra uma das placas, vista de um ponto entre as duas placas posicionado sobre o eixo do capacitor. Supomos que, no instante considerado, o vetor deslocamento  $\vec{D}$ , paralelo ao eixo, aponta para fora da figura e seu módulo é crescente. Nessas condições, a densidade de corrente de deslocamento tem a direção e o sentido do campo, como indicado pelos símbolos  $\otimes$  na figura.

A simetria exige que as linhas de campo magnético sejam circulares, centradas no eixo do capacitor, como ilustrado pela circunferência azul na figura. Queremos calcular o campo  $\vec{H}$  ao longo dessa linha de campo.

Também por simetria, o campo deve ser uniforme ao longo da linha. É fácil, por isso, calcular a integral de linha de  $\vec{H}$  ao redor da circunferência:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi rH. \quad (26)$$

De acordo com o teorema de Stokes, a integral no lado esquerdo da Eq. (26) é igual ao fluxo do rotacional de  $\vec{H}$  através do círculo  $C$  delimitado pela circunferência na figura:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_C \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \hat{n} \, dS. \quad (27)$$

O rotacional de  $\vec{H}$  é dado pela Eq. (17). Como não há condução dentro do capacitor, o primeiro termo à direita é zero. E, como  $\hat{n}$  é paralelo ao eixo, que por sua vez é paralelo a  $\vec{D}$ , a Eq. (27) assume a forma

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \epsilon_0 \int_C \frac{dD}{dt} \, dS. \quad (28)$$

O campo  $\vec{D}$  é uniforme no interior do capacitor. Seu módulo é dado pela Eq. (23). Podemos fatorá-lo da integral no lado direito da Eq. (28), e resulta que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \int_C dS. \quad (29)$$

A integral restante, no lado direito da Eq. (29) é a área do círculo dentro da linha de campo, isto é,

$$\int_C dS = \pi r^2. \quad (30)$$

Temos, portanto, que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\pi r^2}{A} \frac{dQ}{dt}. \quad (31)$$

A integral de linha no lado esquerdo é também dada pela Eq. (26). A comparação com a Eq. (31) mostra, portanto, que

$$2\pi rH = \frac{\pi r^2}{A} \frac{dQ}{dt}, \quad (32)$$

ou seja

$$H = \frac{r}{2A} \frac{dQ}{dt}. \quad (33)$$

Podemos, por fim, substituir a expressão (21) no lugar de  $Q$ , no lado direito, e efetuar a derivada. Notando que a área das placas é  $A = \pi R^2$ , chegamos ao resultado

$$H = \frac{r}{40\pi R^2} \cos(10t), \quad (34)$$

que também pode ser escrito na forma

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} I, \quad (35)$$

onde  $I$  é a corrente na Eq. (19).

A Eq. (35) vale dentro do capacitor, isto é, para  $r \leq R$ . Podemos ver que o campo magnético no eixo ( $r = 0$ ) é zero. À medida que nos afastamos do eixo, o campo magnético cresce linearmente com  $r$  até  $r = R$ . Esse comportamento é idêntico ao do campo magnético num fio de raio  $R$  que transporta uma densidade uniforme de corrente  $j = I/\pi R^2$ . A física da corrente de deslocamento é idêntica à do fluxo de carga.

Vejamos agora a região externa, com  $r > R$ . Nesse caso, a área  $\int_C dS$  no lado direito da Eq. (29) é  $A = \pi R^2$ , visto que somente existe corrente de deslocamento no interior do capacitor, isto é, no círculo de raio  $R$  da figura.

Assim, os fatores  $1/A$  e  $\int_C dS$  no lado direito da Eq. (29) se cancelam e a igualdade assume a forma

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt}. \quad (36)$$

Já vimos, na Eq. (26), que a integral à esquerda na Eq. (36) vale  $2\pi rH$ . E também sabemos que a derivada no lado direito é igual à corrente  $I$ . Podemos concluir que

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (r \geq R). \quad (37)$$

Essa igualdade coincide com a expressão para o campo magnético devido a um fio que conduz corrente  $I$ . Outra vez, vemos que a corrente de deslocamento no interior de um capacitor produz o mesmo efeito que o fluxo de carga num fio.

A Eq. (37) é também muito satisfatória por outra razão. Se andarmos à roda do circuito da figura 1, tomando o cuidado de ficar a uma distância  $r$  do fio condutor, sentiremos sempre o campo  $H$  dado por aquela expressão. Se não houvesse corrente de deslocamento, esse campo desapareceria subitamente perto da placa da esquerda do capacitor e reapareceria, também subitamente, perto da placa direita. Fisicamente, essas súbitas descontinuidades seriam difíceis de aceitar.

### A equação de onda

O conjunto formado pelas Eqs. (1), (2), (3) e (17) é conhecido como *Equações de Maxwell*. Esse conjunto admite soluções ondulatórias, como o próprio escocês demonstrou e como veremos a seguir. Ficará evidente que o segundo termo à direita na Eq. (17), que define a densidade de corrente de deslocamento, tem importância capital na dedução.

Para mostrar que a solução ondulatória prevalece mesmo no vácuo, vamos começar com a suposição de que  $\vec{D} = \vec{E}$  e  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ . Imporemos, adicionalmente, que tanto  $\rho$  como  $\vec{j}$  são iguais a zero. Com isso, as equações de Maxwell assumem a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (40)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (41)$$

Como vemos, sem os termos proporcionais a  $\rho$  e  $\vec{j}$  as equações são simétricas. Podemos esperar que  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  tenham comportamentos semelhantes. A dedução a seguir começará com a Eq. (39), para o rotacional de  $\vec{E}$ , mas poderíamos começar, igualmente, com a Eq. (41), que descreve o rotacional de  $\vec{B}$ .

Começamos, pois, com a Eq. (39) e tomamos o rotacional dos dois lados:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (42)$$



O lado esquerdo tem a estrutura algébrica de um duplo produto vetorial. Podemos simplificá-lo, portanto, com base na **identidade**<sup>1</sup>

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (43)$$

Aplicada a Eq. (43) à Eq. (42), com o cuidado de manter os  $\vec{\nabla}$  à esquerda do campo  $\vec{E}$  [isto é, escrever  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$  em lugar da expressão sem sentido  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{\nabla}$ ] encontramos a expressão

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (44)$$

Substituímos agora, no lugar dos parênteses no primeiro termo do lado esquerdo, a Eq. (38), e, no lugar dos parênteses do lado direito, a correção de Maxwell, Eq. (41). Resulta a igualdade

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (45)$$

De maneira análoga, podemos tomar o rotacional da Eq. (41) e substituir as Eqs. (40) e (42) na expressão resultante para chegar a uma equação diferencial equivalente para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (46)$$

Maxwell preferia trabalhar com os potenciais, em lugar dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , mas chegou a equações equivalentes às Eqs. (45) e (46) e, prontamente, percebeu as implicações. Para discutir a interpretação que ele ofereceu, convém entender melhor as duas igualdades.

Cada uma das Eqs. (45) e (46) constitui três equações diferenciais. A Eq. (46), por exemplo, se desdobra em

$$\nabla^2 B_x = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}, \quad (47)$$

$$\nabla^2 B_y = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, \quad (48)$$

e

$$\nabla^2 B_z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \quad (49)$$

São, portanto, seis equações. Cada uma tem a forma da equação de onda tri-dimensional

$$\nabla^2 F = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (50)$$

onde  $F$  é uma função das variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ .

<sup>1</sup> É fácil entender a Eq. (43). O produto  $\vec{b} \times \vec{c}$  é um vetor  $\vec{d}$ , ortogonal a  $\vec{b}$  e a  $\vec{c}$ . O produto duplo  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  é o mesmo que  $\vec{a} \times \vec{d}$  e, portanto, é ortogonal a  $\vec{d}$ . Isso significa que o produto duplo é um vetor no plano formado pelos vetores  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . Em outras palavras, o produto duplo é uma combinação linear dos vetores  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . É exatamente isso o que nos diz o lado direito da Eq. (43). Os coeficientes da combinação linear são escalares que dependem do vetor  $\vec{a}$ . Vemos assim que eles só podem ser  $\pm(\vec{a} \cdot \vec{b})$  e  $\pm(\vec{a} \cdot \vec{c})$ . Para definir os sinais dos dois termos no lado direito da equação, basta considerar casos particulares com os versores de base:  $\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{y}) = -\hat{y}$ , por exemplo. Na prática, para apoiar a memória, o conto da princesa nômade é útil: uma princesa  $\vec{a}$  está na idade de casar e há dois pretendentes,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . O rei, seu pai, recomenda que, para fazer uma escolha sábia, ela pense num critério para escolher o futuro marido; ele aproveita para avisar que o outro pretendente ficará de guarda no castelo preferido pela noiva [os parênteses no lado direito da Eq. (43) representam os castelos]. A princesa pensa com seus botões: "Gosto de viajar; vou escolher o pretendente que mora mais distante." Assim quando o rei se dirige a ela e pergunta se quer casar com  $\vec{b}$  ela examina a ordem dos pretendentes dentro dos parênteses em  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ , vê que  $\vec{b}$  está mais próximo e responde ao pai: "Negativo". Quando o rei pergunta se quer casar com  $\vec{c}$ , que está mais distante, ela responde "Positivo". O conto também funciona quando o produto é da forma  $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$ , como você pode comprovar.

### A solução de D'Alembert

No Século XVIII, bem antes de Maxwell nascer, a equação de onda já era conhecida. O filósofo/matemático francês Jean Baptiste D'Alembert resolveu a equação unidimensional, para a propagação de uma onda numa corda esticada. A descoberta de D'Alembert pode ser imediatamente estendida para três dimensões. A solução geral da Eq. (50) é uma combinação linear de funções da forma

$$F_{\hat{k}}(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt), \quad (51)$$

onde  $v$  é a velocidade que aparece no primeiro fator à direita na Eq. (50) e  $\hat{k}$  é um vetor tridimensional arbitrário:

$$\hat{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}, \quad (52)$$

onde  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  são três números reais sujeitos apenas à condição

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1. \quad (53)$$

A função  $f$  no lado direito da Eq. (51) depende apenas das condições iniciais  $F(\vec{r}, t = 0)$  e  $(\partial F / \partial t)_{t=0}$ . Ela é função de uma só variável:  $f = f(u)$ , onde  $u = \hat{k} \cdot \vec{r} - vt$ . Significa que o perfil da função num dado instante  $t$  se repete em qualquer instante posterior  $t + \Delta t$ , deslocado no espaço por uma deslocamento  $\Delta r = \hat{k}v\Delta t$ .

Em outras palavras, o perfil da função  $f$  avança no espaço com velocidade  $v$  na direção do vetor  $\hat{k}$ . A figura mostra um exemplo, no qual  $\hat{k} = \hat{x}$ ; o deslocamento, nesse caso, é na direção do eixo  $x$ .

#### Demonstração

Esta caixa mostra que a Eq. (51) é solução da Eq. (50). Para começar, para enfatizar que o lado direito da é uma função de uma só variável, reescrevemos a Eq. (51) na forma

$$F_{\hat{k}}(\vec{r}, t) = f(u), \quad (54)$$

onde

$$u \equiv \hat{k} \cdot \vec{r} - vt. \quad (55)$$

Podemos agora calcular as derivadas parciais de  $F$ . Por exemplo,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (56)$$

Para computar a derivada parcial no lado direito da Eq. (56), precisamos apenas notar que

$$u = k_x x + k_y y + k_z z - vt, \quad (57)$$

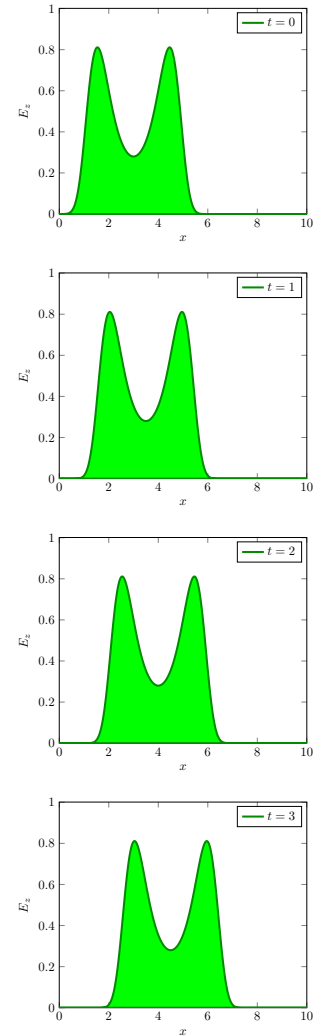


Figura 3: Evolução temporal do perfil do campo elétrico. O campo é paralelo ao eixo  $z$  e tem a forma da Eq. (51) com  $\hat{k} = \hat{x}$ . O eixo vertical é expresso em unidades de  $V/cm$ , o tempo, em segundos e o eixo horizontal, em segundos-luz.

o que mostra que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k_x. \quad (58)$$

Assim, a Eq. (56) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{du} k_x. \quad (59)$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{df}{du} k_y, \quad (60)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{df}{du} k_z \quad (61)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{df}{du} v. \quad (62)$$

Da mesma maneira, podemos calcular as derivadas de segunda ordem. Por exemplo, a partir da Eq. (59), temos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = k_x \frac{\partial}{\partial u} \frac{df}{du}. \quad (63)$$

Assim como  $f(u)$ , a derivada  $\frac{df}{du}$  depende apenas da variável  $u$ . Podemos, portanto, ver que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = k_x \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (64)$$

e, dado que  $\frac{\partial u}{\partial x} = k_x$ , segue que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = k_x^2 \frac{d^2 f}{du^2}. \quad (65)$$

Um cálculo muito parecido mostra que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{du^2}, \quad (66)$$

e, assim, a Eq. (50) se reduz à igualdade

$$(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \frac{d^2 f}{du^2} = \frac{v^2}{v^2} \frac{d^2 f}{du^2}, \quad (67)$$

que é uma identidade, visto que o termo entre parênteses no lado esquerdo é igual à unidade. Em outras palavras, a expressão de D'Alembert, Eq. (51), é solução da Eq. (50), para qualquer função contínua  $f$  e qualquer versor  $\hat{k}$ . E como a equação

de onda é linear, qualquer combinação linear de soluções é também solução. Assim, a solução geral da equação de onda é a combinação

$$F(\vec{r}, t) = \sum_{\hat{k}} \alpha_{\hat{k}} f(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt), \quad (68)$$

onde os coeficientes  $\alpha_{\hat{k}}$  dependem das condições iniciais.

### A velocidade da onda

Maxwell tinha familiaridade com a equação de onda e suas soluções. Entendeu que os campos elétricos e magnéticos poderiam propagar-se, mesmo no vácuo, da mesma maneira que uma onda sonora se propaga no ar, ou que uma onda corre na superfície do mar. Para se propagar, o campo precisa variar com o tempo; um campo constante, como o campo elétrico de uma carga pontual em repouso ou o campo magnético de um fio por onde circula uma corrente contínua, fica restrito à região onde estão suas fontes (a carga no primeiro exemplo e o fio no segundo) e não avança para outras regiões do espaço.

Por isso, a correção de Maxwell para a lei de Ampère é essencial. A forma original da lei de Ampère, Eq. (4), que desconsiderava a corrente de deslocamento e assim ignorava o efeito das variações do campo elétrico sobre os campos magnéticos, não permitia descrever a propagação do campo elétrico ou do campo magnético.

Após incluir a correção e derivar as equações de onda, Maxwell calculou o produto  $\mu_0 \epsilon_0$ , para encontrar a velocidade com que as ondas caminham. A comparação entre as Eqs. (46) e (50) mostra que a velocidade é  $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Podemos repetir esse cálculo com os valores anotados nas Eqs. (5) e (9):

$$v = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \times 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (69)$$

A velocidade da luz, que hoje é definida como

$$c \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s}, \quad (70)$$

já havia sido precisamente medida, na época. As constantes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  eram conhecidos com menos precisão, mas o cálculo que reproduzimos concordou com a velocidade da luz com desvio na ordem de 1%. Maxwell achou muito improvável que fosse **coincidência**<sup>2</sup> e concluiu que a luz era um exemplo de propagação ondulatória dos campos elétrico e magnético. Mais amplamente, as Eqs. (45) e (46) mostram que

<sup>2</sup> Seis décadas antes, no início do Século XIX, a experiência de Young mostrara que a luz é uma onda.

distribuições de carga e correntes elétricas que variam com o tempo produzem *radiação eletromagnética*.

Por exemplo, a corrente num circuito elétrico alimentado por uma fonte de tensão alternada varia com o tempo, tanto no transiente como no regime estacionário. Essa corrente gera um campo magnético que também varia com o tempo. Isso é suficiente para o circuito irradiar campos elétrico e magnético que avançam pelo espaço com a velocidade da luz.

Ao entender que a luz era uma forma de radiação eletromagnética, Maxwell respondeu com precisão matemática a uma questão — o que é a luz? — que desafiara a curiosidade da humanidade desde o tempo das cavernas. Com o tempo, sua descoberta revolucionaria o mundo.

### Radiação monocromática

A solução de D'Alembert é instrutiva, porque ela mostra que os campos elétrico e magnético se propagam como ondas no espaço livre, como ilustrado pela figura 3. Além disso, ela determina a velocidade de propagação, dada pela Eq. (69). Infelizmente, para funções arbitrárias  $f(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ , pode ser muito difícil encontrar as constantes  $\alpha_k$  que satisfazem as condições iniciais. Por isso, na prática, trabalha-se com funções trigonométricas, para as quais é sempre possível encontrar os coeficientes da combinação linear no lado direito da Eq. (68).

Especificamente, podemos escrever as soluções da equação de onda como combinações de senos e cossenos. Podemos, por exemplo, escrever a componente  $z$  do campo elétrico na forma

$$E_z(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left( \alpha_k \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t) + \beta_k \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t) \right). \quad (71)$$

Alternativamente, poderíamos trabalhar com exponenciais complexas. Mais adiante, veremos que isso pode ser conveniente, mas neste capítulo, para discutir a física das ondas eletromagnéticas, trabalharemos com as função cosseno no lado direito da Eq. (71). Assim, para discutir o comportamento da componente  $z$  do campo elétrico, escreveremos que

$$E_z(\vec{r}, t) = E_z^0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (72)$$

onde  $E_z^0$  é uma constante,  $\vec{k}$  é um vetor qualquer e a constante  $\omega$  é **proporcional ao módulo do vetor**:<sup>3</sup>

$$\omega = ck \quad \left( k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right). \quad (73)$$

<sup>3</sup> A rigor, uma vez que *omega* depende de  $k$ , deveríamos escrever  $\omega_k$  no lado direito da Eq. (71), como fizemos na Eq. (71). Para não carregar a notação, escreveremos  $\omega$  e teremos em mente que essa frequência é dada pela Eq. (73).

Para um ponto fixo  $\vec{r} = \vec{r}_0$ , o lado direito da Eq. (72) oscila em função do tempo com frequência  $\omega$ . Como discutido abaixo, na seção *O espectro eletromagnético*, a cor da luz visível é determinada pela frequência. Por isso a onda no lado direito da Eq. (72) é chamada de *monocromática*.

Nossa tarefa, agora, é mostrar que a onda monocromática é um caso particular de função de D'Alembert. Para isso, basta fatorar o módulo do vetor  $\vec{k}$  no argumento do cosseno da Eq. (72):

$$E_z(\vec{r}, t) = E_z^0 \cos\left(k\left(\frac{\hat{k}}{k} \cdot r - \frac{\omega}{k}t\right)\right). \quad (74)$$

Mas  $\vec{k}/k$  é o versor  $\hat{k}$  e, de acordo com a Eq. (73), a razão  $\omega/k$  é a velocidade da luz. Assim, a Eq. (74) equivale à igualdade

$$E_z(\vec{r}, t) = E_z^0 \cos\left(k(\hat{k} \cdot r - ct)\right), \quad (75)$$

que podemos escrever na forma de D'Alembert:

$$E_z(\vec{r}, t) = f(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct), \quad (76)$$

onde

$$f(u) = E_z^0 \cos(ku) \quad (77)$$

A Eq. (76) mostra que o campo elétrico da Eq. (72) se propaga na direção do vetor  $\vec{k}$ , ou se você preferir, do versor  $\hat{k}$ . Pense num ponteiro laser, que emite um feixe de luz vermelha. O campo elétrico nesse feixe pode ser descrito pela Eq. (72). Nesse caso, o vetor  $\vec{k}$  tem a direção e o sentido do feixe. Conhecida a frequência, o módulo de  $\vec{k}$  pode ser obtido da Eq. (73). Falta conhecer a direção em que aponta o campo elétrico. Você pode achar que a direção de  $\vec{E}$  coincide com a de  $\vec{k}$ , mas a próxima seção mostra que isso nunca acontece.

### *A direção do campo elétrico*

A Eq. (72) descreve a componente  $z$  do campo elétrico. Entretanto, em geral, o campo tem componentes ao longo dos três eixos. Devemos, portanto escrever

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (78)$$

onde  $\vec{E}_0$  é o vetor que define a direção do campo elétrico. Em princípio  $\vec{E}_0$  pode ter qualquer orientação — pode ser na direção de  $z$ , por exemplo, ou na direção da bissetriz entre os eixos  $x$  e  $y$ . Há, porém, uma restrição, como veremos agora.

O campo elétrico deve respeitar a Eq. (38). Para impor essa condição, precisamos calcular  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ . A primeira das derivadas parciais é da forma da Eq. (59), a segunda, da forma da Eq. (60)

e a terceira, da forma da Eq. (61). Assim, se voltarmos à Eq. (77) para encontrar a função  $f(u)$ , poderemos escrever que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -k_x E_x^0 \text{sen}(ku), \quad (79)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = -k_y E_y^0 \text{sen}(ku) \quad (80)$$

e

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -k_z E_z^0 \text{sen}(ku). \quad (81)$$

Somadas as três igualdades e imposta a condição  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , concluímos que

$$k_x E_x^0 + k_y E_y^0 + k_z E_z^0 = 0, \quad (82)$$

ou seja

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0. \quad (83)$$

Significa que o campo elétrico é perpendicular ao vetor  $\vec{k}$ , que define a direção de propagação. Dito de outra forma, o campo elétrico é um vetor no plano perpendicular a  $\vec{k}$ . Ainda há muitas direções possíveis, como mostra a figura 4, mas o campo não pode ter componente na direção de  $\vec{k}$ . No exemplo da caneta laser, o campo elétrico sempre aponta em direção perpendicular ao feixe.

### Frequência e vetor de onda

A função trigonométrica no lado direito da Eq. (78) é periódica. Para uma posição fixa, ela varia periodicamente com o tempo. O *período*  $T$  é definido como o intervalo de tempo necessário para que o campo elétrico se repita. Assim,  $\omega T = 2\pi \text{rad}$ , ou seja,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (84)$$

O inverso do período é a frequência expressa em Hz:

$$f = \frac{1}{T}, \quad (85)$$

do que segue que

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (86)$$

Para tempo fixo, o campo elétrico na Eq. (78) é função periódica da projeção da posição  $\vec{r}$  sobre o versor  $\hat{k}$ . O *comprimento de onda*  $\lambda$  é

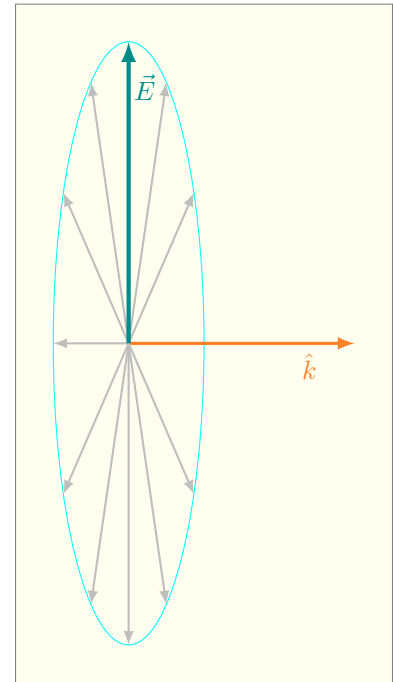


Figura 4: O campo elétrico e o versor de propagação  $\hat{k}$ . O campo elétrico, representado pela seta vertical é perpendicular a  $\hat{k}$ . O campo poderia estar na direção de qualquer uma das setas cinza mostradas como ilustração, mas não pode ter componente na direção da seta horizontal.

definido como a distância que se deve andar na direção de  $\hat{k}$  para que o campo elétrico se repita, isto é,  $\vec{k} \cdot \hat{k} \lambda = 2\pi$ , ou seja,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (87)$$

A multiplicação da Eq. (86) pela Eq. (87) mostra que

$$\lambda f = \frac{\omega}{k}, \quad (88)$$

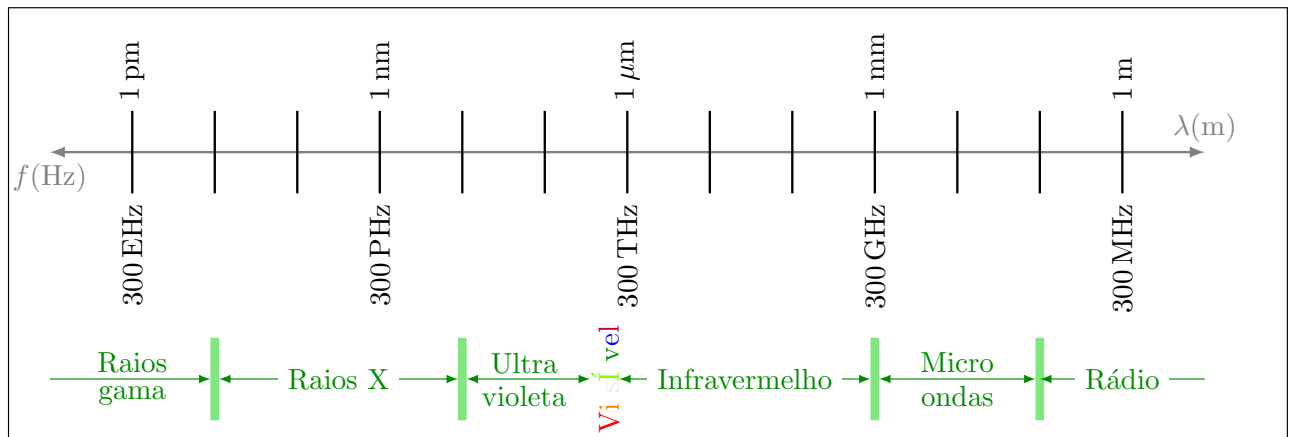
e como a razão  $\omega/k$  é a velocidade da luz, concluímos que

$$c = \lambda f. \quad (89)$$

A Eq. (89) tem uma interpretação simples. O campo elétrico na Eq. (78) avança um comprimento de onda  $\lambda$  a cada período  $T$ . Sua velocidade, portanto, é  $\lambda/T$ , ou  $\lambda f$ .

### O espectro eletromagnético

Quando uma carga é acelerada, produz um campo elétrico que se propaga no espaço. Se o movimento é periódico, com frequência  $\omega$ , produz um campo harmônico, com a mesma frequência. Se o movimento for menos regular, produzirá uma combinação de campos com várias frequências.



Não há limites inferior ou superior para a frequência com que um campo elétrico oscila. No dia a dia, estamos imersos em campos com frequências que vão desde algumas dezenas de Hz até frequências superiores à da luz visível. Os fios que trazem energia elétrica até as lâmpadas presas ao teto de sua casa emitem radiação com frequência de 60 Hz. O Sol irradia em uma larga faixa de frequências. O pico fica perto de  $6 \times 10^{14}$  Hz, mas boa parte da radiação tem mais de  $10^{15}$  Hz.

Figura 5: Espectro eletromagnético. Os comprimentos de onda e as frequências de vários tipos de radiação são indicados. A luz, radiação visível, ocupa uma estreita faixa, entre 400 e 750 THz.



A figura 3 mostra as radiações eletromagnéticas com frequências entre  $f = 1 \times 10^8$  Hz e  $f = 1 \times 10^{19}$  Hz, isto é, o *espectro eletromagnético*.<sup>4</sup> Os comprimentos de onda correspondentes também são marcados. O espectro se divide em faixas. Em cada faixa, a radiação tem um nome, definido por tradição histórica.

As faixas foram definidas com base em comprimentos de onda. Para  $\lambda > 10$  cm, os campos são conhecidos como ondas de *rádio*. As emissoras de rádio AM, que eram muito populares há algumas décadas, trabalham com frequências na ordem de 1 MHz. As emissoras de FM trabalham perto de 100 MHz. Os celulares de hoje trabalham com frequências perto do limite superior dessa faixa. Nos hospitais, os aparelhos de ressonância magnética empregam frequências de alguns MHz.

Entre  $\lambda = 10$  cm e  $\lambda = 1$  mm, estamos na faixa de *micro-ondas*, também usada para comunicação. Roteadores Wifi e telefones sem fio, por exemplo, operam nessa faixa. Os celulares 5G também trabalharão aqui.

Comprimentos de onda entre  $\lambda = 1$  mm e  $\lambda \approx 750$  nm estão na faixa do infravermelho. Estamos sempre rodeados por muita radiação nessa faixa, porque tudo que está nas temperaturas em que vivemos emite radiação infravermelha. Isso acontece porque a agitação térmica dos átomos produz radiação eletromagnética. Uma pessoa à temperatura de 36 °C, por exemplo, emite quantidade apreciável de radiação com comprimento de onda maior do que 5  $\mu$ m.

O comprimento de onda  $\lambda = 750$  nm separa o infravermelho do visível. O intervalo de frequências visíveis varia de pessoa para pessoa, mas a maioria de nós percebe luz com  $\lambda = 740$  nm como vermelho escuro. A sensibilidade dos olhos aumenta, inicialmente, à medida que o comprimento de onda diminui e é máxima entre 600 nm (amarelo) e 500 nm (verde). Depois, diminui até desaparecer perto de  $\lambda = 400$  nm, que é visto como violeta escuro.

Para comprimentos de onda entre 400 nm e 10 nm, estamos na faixa do *ultravioleta*. Uma fração apreciável da radiação solar que chega à Terra pertence ao ultravioleta. A maior parte é absorvida pela atmosfera, mas um pouco chega ao solo, e o fluxo se torna apreciável quando os raios chegam ao chão formando ângulo inferior a 45° com a vertical. Algumas lâmpadas fluorescentes emitem um pouco de radiação nessa faixa, e a “luz negra” encontrada em casas noturnas é ultravioleta.

A radiação ultravioleta é perigosa, porque tem energia suficiente para ionizar átomos. Por isso, ao incidir sobre a pele, tem potencial para transtornar processos biológicos e produzir câncer. Os filtros de proteção solar são feitos para absorver o ultravioleta e impedir que a

<sup>4</sup> “Espectro” é o coletivo de frequência, da mesma maneira que “enxame” é o coletivo de abelha.

radiação atinja a pele. Sem filtro, vale a regra da sombra: fique em pé e compare o comprimento de sua sombra com sua altura; se a sombra for menor, fuja do sol.

Na faixa de comprimentos de onda entre  $\lambda = 10 \text{ pm}$  e  $\lambda = 10 \text{ nm}$  estão os *raios X*. Essa radiação foi descoberta pelo físico alemão Wilhelm Röntgen, em 1895, ao estudar **tubos de raios catódicos**<sup>5</sup> Os raios X são muito mais perigosos do que a radiação ultravioleta porque atravessam o tecido mole do corpo e somente são absorvidos pelos ossos. A exploração de sua capacidade de penetração deu origem à radiologia, que revolucionou a medicina.

O comprimento das ondas de raios X é comparável com a distância entre os átomos na matéria condensada: sólidos ou líquidos. Um feixe de raios X que incide sobre um cristal sofre efeitos de interferência, assim como um feixe de luz visível que incide sobre uma bolha de sabão sofre interferência e faz a bolha parecer furta-cor. O estudo sistemático desse efeito, chamado de *cristalografia*, permite determinar a estrutura cristalina dos materiais.

Finalmente, no extremo de altas frequências, com comprimentos de onda menores do que 10 pm, estão os *raios gama*. Os raios gama foram **descobertos**<sup>6</sup> pelo físico/químico francês Paul Villard, em 1903.

Os raios gama encontram aplicação prática em radioterapia, na tomografia por emissão positrônica (PET) e em algumas técnicas experimentais. Em condições descontroladas, entretanto, a radiação é terrivelmente letal. É ela, principalmente, que torna perigosa a radioatividade. Raios gama são tipicamente gerados em processos nucleares. Explosões estelares geram enorme fluxo de radiação nessa faixa.

### Onda magnética

Até aqui, estivemos atentos à propagação do campo elétrico. Começamos com a equação de onda (45) e estudamos o comportamento ondulatório de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , na forma de D'Alembert e, depois, como onda monocromática. Isso pode dar a impressão de que o campo elétrico se propaga por si só, o que não é verdade. Para deduzir a equação de onda, tivemos de recorrer às leis de Maxwell, que relacionam as derivadas do campo elétrico com as derivadas do campo magnético. Para se propagar, o campo elétrico precisa do campo magnético.

Dito de outra maneira, onda de campo elétrico forma um par inseparável com a onda de campo magnético. As duas avançam juntas e, conjuntamente, constituem uma *onda eletromagnética*. As oscilações do campo magnético geram o campo elétrico, via lei de Faraday, e

<sup>5</sup> Na época, o elétron ainda era desconhecido, mas sabia-se que um filamento aquecido num tubo evacuado emitia *raios catódicos* que podiam ser aceleradas por um campo elétrico. Röntgen fez raios catódicos incidir sobre uma folha de alumínio e observou que uma placa pintada com material luminescente brilhava enquanto os raios catódicos incidiam. Ele concluiu que a colisão dos raios catódicos com o alumínio resultava na emissão de um outro tipo de raios, que ele batizou de X para enfatizar que tinham natureza desconhecida. Mais tarde, ele observou que uma sombra dos ossos de seus dedos aparecia na tela quando ele posicionava sua mão entre o tubo de raios catódicos e a placa luminescente.

<sup>6</sup> Villard fez sua descoberta ao estudar a radiação emitida pelo decaimento radiativo do elemento rádio. O decaimento radiativo produz partículas alfa (núcleos de hélio), partículas beta (elétrons) e raios gama. Villard conseguiu filtrar as partículas e verificou que a radiação remanescente impressionava placas fotográficas, mesmo após atravessar placas de chumbo.

as oscilações do campo elétrico geram o campo magnético, via lei de Ampère-Maxwell.

Nossa derivação começa com a expressão do campo elétrico como onda monocromática, isto é, com a Eq. (78). Queremos aplicar a lei de Faraday, Eq. (39), que relaciona o rotacional do campo elétrico com a derivada temporal do campo magnético. Precisamos, antes de mais nada, calcular o rotacional

$$\vec{\nabla} \times E = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z}. \quad (90)$$

Cada uma das seis derivadas no lado direito da Eq. (90) é fácil de calcular. Vejamos a primeira,  $\partial E_z / \partial y$ , como exemplo. O campo elétrico  $\vec{E}$  é o produto de um escalar [a função  $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ ] por um vetor (o prefator  $\vec{E}_0$ ). A sua componente  $z$  é, portanto,  $E_z^0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . Ela depende de  $y$ , porque o produto escalar no argumento do cosseno contém o termo  $k_y y$ . Segundo a regra da cadeia, a derivada que queremos é o produto da derivada do cosseno em relação a seu argumento pela derivada do argumento em relação a  $y$ , isto é,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -k_y E_z^0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (91)$$

Analogamente, podemos ver que a segunda derivada no lado direito da Eq. (90) é

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -k_z E_y^0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (92)$$

As demais derivadas na Eq. (90) são semelhantes e podem ser obtidas por permutação cíclica ( $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ ). Por exemplo, para encontrar a terceira derivada na Eq. (90), partimos da Eq. (91) e substituímos, tanto no lado direito como no esquerdo,  $z$  por  $x$  e  $y$  por  $z$ . Com isso, chegamos ao resultado

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \left( \left( k_y E_z^0 - k_z E_y^0 \right) \hat{x} + \left( k_z E_x^0 - k_x E_z^0 \right) \hat{y} + \left( k_x E_y^0 - k_y E_x^0 \right) \hat{z} \right), \quad (93)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{k} \times \vec{E}_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (94)$$

## Regra prática

Para qualquer campo da forma

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (95)$$

as derivadas de  $\vec{F}$  são todas proporcionais a  $-\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , com coeficientes que podem ser obtidos por meio das seguintes substituições:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{F}, \quad (96)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \rightarrow \vec{k} \times \vec{F} \quad (97)$$

e

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \rightarrow -\omega \vec{F}. \quad (98)$$

A derivação de cada uma dessas relações é análoga à dedução da Eq. (94).

De acordo com a lei de Faraday, o lado direito da Eq. (94) é o negativo da derivada temporal do campo magnético, isto é,

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (99)$$

onde já foi eliminado o sinal negativo que aparecia em cada lado.

Precisamos agora integrar os dois lados no tempo para encontrar o campo magnético. Como somente o termo  $-\omega t$  no argumento do seno no lado direito depende do tempo, a integração é fácil, e chegamos ao resultado<sup>7</sup>

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (100)$$

Podemos simplificar o lado direito da Eq. (100). Para isso, em primeiro lugar, devemos notar que os dois últimos termos à direita constituem o lado direito da Eq. (78); eles podem, portanto, ser substituídos por  $\vec{E}$ . Em seguida, devemos notar que a frequência  $\omega$  é igual ao produto  $kc$ . Isso quer dizer que a razão  $\vec{k}/\omega$  é o mesmo que  $\hat{k}/c$ . Assim, a Eq. (99) equivale a

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}. \quad (101)$$

<sup>7</sup> Uma vez que a derivada no lado esquerdo da Eq. (99) é parcial, a integração dá o lado direito da Eq. (100) mais uma função arbitrária  $f(\vec{r})$  da posição. Entretanto, o campo magnético deve obedecer às Eqs. (40) e (41), de Maxwell, além de satisfazer as condições iniciais (campos e derivadas nulas longe das fontes que dão origem a eles). Na prática, isso significa que  $f(\vec{r}) = 0$ .

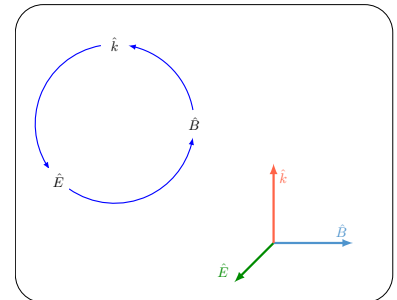


Figura 6: Vetores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{k}$ . Os três vetores são mutuamente ortogonais e obedecem à relação  $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}$  e permutações cíclicas, como indicado pelo diagrama circular no canto superior esquerdo.

Já sabíamos que o versor  $\hat{k}$  é ortogonal ao vetor  $\vec{E}$ . Agora, a Eq. (101) nos ensina que  $\vec{B}$  também é perpendicular a  $\hat{k}$ . Além disso, o campo magnético é também perpendicular a  $\vec{E}$ . Os versores  $\hat{E}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{k}$  formam uma tríade de vetores mutuamente ortogonais, como mostra a ilustração na figura 6. E a Eq. (101) mostra que o módulo de  $\vec{B}$  é igual ao de  $\vec{E}$  dividido pela velocidade da luz.

### Exercício resolvido

O campo elétrico de uma onda eletromagnética é parcialmente conhecido:

$$\vec{E} = (\hat{x} + \hat{y} + \alpha\hat{z}) \cos(2\pi(x - y + z) - \omega t), \quad (102)$$

onde  $\alpha$  e  $\omega$  são duas constantes que precisam ser determinadas. Encontre-as e determine o campo magnético da onda.

#### SOLUÇÃO.

Para encontrar a frequência, precisamos conhecer o vetor de onda  $\vec{k}$ . A parte espacial do argumento do cosseno, na Eq. (102), é  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ . Segue que  $k_x x = 2\pi x$ ,  $k_y y = -2\pi y$  e  $k_z z = 2\pi z$ . Em conjunto, temos que

$$\vec{k} = 2\pi(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}). \quad (103)$$

O módulo de  $\vec{k}$  é

$$k = 2\pi\sqrt{3}, \quad (104)$$

e a frequência  $\omega$ , dada pela Eq. (73), é

$$\omega = 2\pi\sqrt{3}c. \quad (105)$$

Para encontrar a constante  $\alpha$ , devemos lembrar que o campo elétrico é ortogonal a  $\vec{k}$ . Quer dizer que  $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ , onde  $\vec{E}_0 = \hat{x} + \hat{y} + \alpha\hat{z}$  é o primeiro fator à direita na Eq. (102), o vetor que especifica a direção do campo elétrico. Dado o vetor  $\vec{k}$  que encontramos na Eq. (103), obtemos a igualdade

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 2\pi - 2\pi + 2\pi\alpha, \quad (106)$$

e como o produto escalar deve ser zero, concluímos que  $\alpha = 0$ .

Substituímos, agora,  $\alpha = 0$  e  $\omega = 2\pi\sqrt{3}c$  no lado direito da Eq. (102) para encontrar a expressão completa para o campo elétrico:

$$\vec{E} = (\hat{x} + \hat{y}) \cos\left(2\pi\left(x - y + z - \sqrt{3}ct\right)\right). \quad (107)$$

Conhecido o campo elétrico, a Eq. (101) determina o campo magnético:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos\left(2\pi\left(x - y + z - \sqrt{3}ct\right)\right), \quad (108)$$

onde

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0. \quad (109)$$

O versor  $\hat{k}$  é dado pelo lado direito da Eq. (103) dividido por  $k = \sqrt{3}$ :

$$\hat{k} = \frac{\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{3}}, \quad (110)$$

e seu produto vetorial com o campo  $\vec{E}_0 = \hat{x} + \hat{y}$  mostra que

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}c} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{bmatrix}, \quad (111)$$

isto é,

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}c} (-\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}). \quad (112)$$

A onda magnética é, portanto, dada pela expressão

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{3}c} (-\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}) \cos \left( 2\pi \left( x - y + z - \sqrt{3}ct \right) \right), \quad (113)$$

#### VERIFICAÇÃO DO RESULTADO.

Para conferir, podemos ver se os campos encontrados satisfazem as equações de Maxwell. Dada a relação (96), para calcular as divergências dos campos devemos computar os produtos escalares de  $\vec{k}$  com  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . A escolha  $\alpha = 0$  do coeficiente na Eq. (102) foi feita para garantir que  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  e, portanto, que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ .

Podemos, por outro lado, efetuar o produto escalar entre o vetor  $\vec{k}$  na Eq. (103) e o vetor  $\vec{B}$  na Eq. (113), para mostrar que  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  e, portanto, que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

A Eq. (101) foi derivada da lei de Faraday e, portanto, garante que os campos elétrico, Eq. (107), e magnético, Eq. (113), satisfaçam a Eq. (39).

Resta verificar a lei de Ampère-Maxwell, Eq. (41). Para isso, efetuamos nela as substituições indicadas nas relações (97) e (98). Resulta que

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = -\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (114)$$

As funções trigonométricas dos dois lados são idênticas. Como não são nulas, elas podem ser canceladas. Para que a Eq. (114) seja correta, é necessário, apenas, que

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_0, \quad (115)$$

ou, se lembrarmos que  $\omega = ck$  e dividirmos por  $k$  os dois lados, que

$$\hat{k} \times \vec{B}_0 = -c \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_0. \quad (116)$$

Vamos agora calcular separadamente os dois lados da Eq. (116). Começamos com o lado esquerdo. O produto vetorial entre  $\hat{k}$  [Eq. (110)] e  $\vec{B}_0$  [Eq. (112)] dá

$$\hat{k} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{3c} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{bmatrix}, \quad (117)$$

isto é,

$$\hat{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{1}{c}(\hat{x} + \hat{y}). \quad (118)$$

Passamos agora para o lado direito da Eq. (116). O campo  $\vec{E}_0$  pode ser obtido da Eq. (107), e  $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ . Com isso, vemos que

$$-c\mu_0\epsilon_0\vec{E}_0 = -\frac{1}{c}(\hat{x} + \hat{y}), \quad (119)$$

idêntico ao lado direito da Eq. (118).

Isso mostra que a Eq. (114), equivalente à lei de Ampère-Maxwell, é satisfeita. Verificamos, assim, que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que encontramos satisfazem as quatro equações de Maxwell.

### Propagação da onda eletromagnética

A figura 6 mostra os campos elétrico e magnético de uma onda que avança na direção  $\vec{k} = \hat{z}$ . O campo  $\vec{E}$  é paralelo a  $\hat{x}$ , enquanto  $\vec{B}$  é paralelo a  $\hat{y}$ . Em qualquer ponto do espaço, os três vetores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $\hat{k}$  são mutuamente ortogonais, como na figura 4. Em qualquer ponto, o módulo de  $\vec{B}$  é proporcional ao de  $\vec{E}$ , como vimos ao discutir a Eq. (101).

O painel da esquerda mostra a onda em  $t = 0$ . Nesse instante, os dois campos têm máxima intensidade na origem ( $\vec{r} = 0$ ). O painel do meio mostra a onda um quarto de período  $T$  depois. A onda avançou  $\lambda/4$ , e os campos  $\vec{E}$  e  $vecB$  se anulam na origem; os campos máximos aparecem em  $z = \lambda/4$ . No painel da direita,  $t = T/2$ , a onda avançou  $\lambda/2$  em relação a  $t = 0$  e os campos se inverteram. Na origem, por exemplo, o campo  $\vec{E}$  tem intensidade máxima, mas aponta no sentido  $-\hat{x}$ ; da mesma maneira, o campo  $\vec{B}$  tem intensidade máxima, mas aponta no sentido  $-\hat{y}$ .

No instante  $t = T$  (não representado na figura), a onda terá avançado  $\lambda$  na direção de  $\hat{z}$  e repetirá o comportamento retratado no painel da esquerda da figura 7. Por exemplo, o campo elétrico voltará a ser máximo e ter o sentido de  $\hat{x}$ .

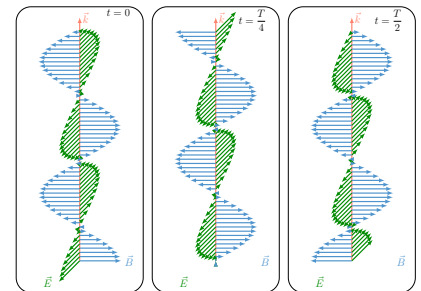


Figura 7: Propagação de onda eletromagnética. O painel da esquerda mostra os campos elétrico e magnético de uma onda, no instante  $t = 0$ . O vetor de onda  $\vec{k}$  é paralelo ao eixo  $z$ , na vertical. O vetor  $\vec{E}$  tem a direção do versor  $\hat{x}$ , enquanto o vetor  $\vec{B}$  tem a direção do versor  $\hat{y}$ . O painel do meio mostra a onda no instante  $t = T/4$ , onde  $T$  é o período de oscilação; nesse intervalo, ela avançou um quarto de comprimento de onda, na direção de  $\hat{k}$ . O painel da direita mostra a onda em  $t = T/2$ ; em relação a  $t = 0$ , o avanço é agora meio comprimento de onda.