TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 3

1. Relações de Equivalência

1. Verifique e justifique, se a relação R é reflexiva, simétrica, transitiva ou anti-simétrica.
(a) R é uma relação em $\mathbb{N}$ dada por "$x > y$";
(b) R é a relação "$x \neq y$" em $\mathbb{Z}$;
(c) R é a relação "$\subset$" em $\mathcal{P}(A)$, para um conjunto A qualquer;
(d) R é a relação "$x \subset y$ e $x \neq y$" em $\mathcal{P}(A)$, para um conjunto A qualquer.

2. (a) Ache o erro da seguinte demonstração:
"Seja R uma relação simétrica e transitiva em A qualquer e fixe $x \in A$. Seja y tal que xRy. Como R é simétrica, temos que yRx. Pela transitividade de R temos que xRy e yRx implica que xRx. Logo R é reflexiva. Mostramos assim que toda relação simétrica e transitiva é reflexiva."
(b) Dê um exemplo de uma relação que é simétrica e transitiva, mas não é reflexiva.

3. Mostre que as relações abaixo são relações de equivalência e determine as classes de equivalência e o conjunto quociente:
(a) R é a relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(a, b)R(c, d)$ se e somente se $a + d = b + c$;
(b) R é a relação em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $(a, b)R(c, d)$ se e somente se $ad = bc$;
(c) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por xRy se e somente se $x - y$ é um número inteiro;
(d) R é a relação em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $(x, y)R(z, t)$ se e somente se $x = z$.

4. Queremos particionar $\mathbb{N}$ usando a família formada de conjuntos da forma $\{n, n+1, n+2\}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um múltiplo de 3. Mostre que de fato essa família de conjuntos dá uma partição de $\mathbb{N}$. Determine a relação de equivalência que corresponde a esta partição.

5. Considere a família de subconjuntos de $\mathbb{R}$ da forma $[n, n + 1[$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Verifique que essa família é uma partição de $\mathbb{R}$ e determine a relação de equivalência correspondente. Determine as classes de equivalência e o conjunto quociente.

6. Considere a relação em $\mathbb{R}$ dada por xRy se $y - x \in \mathbb{Z}$. Determine a partição de $\mathbb{R}$ correspondente. Verifique que a seguinte operação de soma está bem definida:

$$\begin{aligned} \oplus : \quad & \mathbb{R}/R \times \mathbb{R}/R \to \mathbb{R}/R \\ & [x] \oplus [y] = [x + y] \end{aligned}$$

7. Crie novas partições para $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ determinando as relações de equivalência correspondentes.

2. Ordens Parciais

8. Seja A o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ e X o conjunto de todas as funções de a em $\{0, 1\}$, onde $a \in A$. Defina em X a relação $f \leq g$ se e só se $f \subseteq g$.
(a) Mostre que esta relação é uma ordem parcial em X.
(b) Qual é o menor elemento desta ordem? E o elemento minimal?

(c) Para $F \subset A$, mostre que $\sup F$ existe se e somente se F é um sistema compatível de funções (ou seja, dadas $f, g \in F$, existe $h \in A$ tal que $f \leq h$ e $g \leq h$) e que nesse caso $\sup F = \bigcup F$.

9. Mostre que se R é uma ordem parcial em A, então R^{-1} também é uma ordem parcial em A e que se $B \subset A$, então temos:
(a) a é o menor elemento de B em R^{-1} se e somente se a é o maior elemento de B em R.
(b) Análago para "elemento minimal" e "elemento maximal".
(c) Determine R^{-1}, onde R é a ordem do exercício 1 e verifique, através de exemplos, os itens (a) e (b).

10. Dê exemplos de conjuntos finitos parcialmente ordenados $(A, <)$ e $B \subset A$ tais que:
(a) B tem um maior elemento.
(b) B não tem menor elemento.
(c) B não tem maior elemento mas tem supremo.
(d) B não tem supremo.

11. Seja A o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.
(a) Mostre que a relação $\prec$ em A definida por $f \prec g$ se e somente se $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma ordem parcial em A. Esta ordem é total? Justifique.
(b) A tem um menor elemento relativo a essa ordem?

12. Sejam $(A_1, <_1)$ e $(A_2, <_2)$ ordens com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Defina $\prec$ em $B = A_1 \cup A_2$ por

$$x \prec y \text{ se e somente se } (x, y \in A_1 \text{ e } x <_1 y) \text{ ou } (x, y \in A_2 \text{ e } x <_2 y) \text{ ou } (x \in A_1 \text{ e } y \in A_2).$$

Mostre que $\prec$ é uma ordem em B e que $\prec \cap A_1^2 = <_1$ e $\prec \cap A_2^2 = <_2$.

13. Considere $\mathbb{R}$ com a ordem usual $\leq$.
(a) Defina em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a seguinte relação: (conhecida como *ordem lexicográfica*)

$$(a, b) \leq_1 (c, d) \text{ se e só se } a \leq c \text{ ou } (a = c \text{ e } b \leq d).$$

Mostre que esta relação é uma ordem parcial em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Esta ordem é total? Justifique.
(b) Defina agora em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a ordem

$$(a, b) \leq_2 (c, d) \text{ se e só se } a \leq c \text{ e } (b \leq d).$$

Mostre que esta também é uma ordem parcial em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (conhecida como *ordem produto*). Compare com a ordem definida no item (a) (por exemplo, esta ordem é total?).

14. Seja R uma relação transitiva e reflexiva em A (R é chamada uma pré-ordem em A). Defina E em A por aEb se e somente se aRb e bRa.
(a) Mostre que E é uma relação de equivalência em A.
(b) Defina a relação R/E em A/E por $[a]_E \ R/E \ [b]_E$ se e somente se aRb. Mostre que a definição não depende da escolha dos representantes de $[a]_E$ e $[b]_E$. Mostre também que R/E é uma ordem parcial em A/E.

15. Seja $A \neq \emptyset$ e seja $Pt(A)$ o conjunto de todas as partições de A. Defina a relação $\leq$ em $Pt(A)$ por $S_1 \leq S_2$ se e somente se para todo $C \in S_1$ existe $D \in S_2$ tal que $C \subseteq D$ (neste caso dizemos que S_1 refina S_2).
(a) Mostre que $\leq$ é uma ordem em $Pt(A)$.
(b) Dados $S_1, S_2 \in Pt(A)$, mostre que existe $\inf\{S_1, S_2\}$. Sugestão: considere $S = \{C \cap D : C \in S_1 \text{ e } D \in S_2\}$.

16. (Extra) Mostre que se $xRy \leftrightarrow xR^{-1}y$, então R tem a propriedade simétrica.

17. (Extra) Sejam R e S relações em um conjunto A. Mostre que:

(a) R reflexiva $\rightarrow R \cap R^{-1} \neq \emptyset$;

(b) R simétrica $\rightarrow R^{-1}$ simétrica;

(c) R e S simétricas $\rightarrow R \cup S$ simétrica e $R \cap S$ simétrica;

(d) R e S transitivas $\rightarrow R \cap S$ transitiva; mas o mesmo não vale para a união (dê exemplo);

(e) R transitiva $\rightarrow R^{-1}$ transitiva;

(f) R é transitiva se e somente se $R \circ R \subset R$.