3. EVs com Produto Interno

Teorema 1 - Slide 11

PROVA:

Para determinar se $B = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ é um conjunto LD ou LI, avalia-se a equação:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \qquad (1)$$

Aplique o produto interno por $\vec{v}_i$, $\vec{v}_i \in B$, em (1):

$$< \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n , \vec{v}_i > = < \vec{0}, \vec{v}_i >$$

$$\alpha_1 < \vec{v}_1, \vec{v}_i > + \dots + \alpha_i < \vec{v}_i, \vec{v}_i > + \dots + \alpha_n < \vec{v}_n, \vec{v}_i > = 0 \qquad (2)$$

Como B é um conjunto ortogonal de vetores não-nulos:

$$< \vec{v}_j, \vec{v}_i > = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \quad (\vec{v}_i \perp \vec{v}_j) \\ 1 & \text{se } i = j \quad (\vec{v}_i \neq 0) \end{cases}$$

Desta forma, a eq. (2) se resume a:

$$\alpha_i \underbrace{< \vec{v}_i, \vec{v}_i >}_{\neq 0} = 0$$

E o termo acima implica $\alpha_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Logo, B é um conjunto LI, pois a solução trivial é a única admitida.

Teorema 2 - Slide 13

PROVA :

São assertivas do Teorema (2):

(1) $\vec{p} \parallel \vec{v} \quad \therefore \quad \vec{p} = \alpha \vec{v}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

(2) $(\vec{u} - \vec{p}) \perp \vec{v}$

Mostrar que $\vec{p}$ existe e é único se resume a mostrar que α existe e é único.

Da eq. (2):

$$\langle \vec{u} - \vec{p}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle p, \vec{v} \rangle = 0$$

Mas: $p = \alpha \vec{v}$. Assim:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \alpha \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \alpha \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad \therefore \ \forall \ \vec{u}, \vec{v} \in V, \ \exists \alpha \text{ e é único}$$

escalar

Substituindo α em $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \right) \vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$$

Teorema 3 - Slide 14

PROVA:

Se $B = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n \}$ é base de V, então todo $\vec{w} \in V$ pode ser escrito como CL dos vetores da base B:

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_i \vec{v}_i + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \qquad (1)$$

Aplique o produto interno por $\vec{v}_i$, $\vec{v}_i \in B$, em (1):

$$<\vec{w}, \vec{v}_i> = \alpha_1 \underbrace{<\vec{v}_1, \vec{v}_i>}_{=0} + \dots + \alpha_i <\vec{v}_i, \vec{v}_i> + \dots + \alpha_n \underbrace{<\vec{v}_n, \vec{v}_i>}_{=0}$$

$<\vec{v}_i, \vec{v}_j> = 0$ se $i \neq j$, pois B é ortogonal. Assim, da equação acima conclui-se que:

$$\alpha_i = \frac{<\vec{w}, \vec{v}_i>}{<\vec{v}_i, \vec{v}_i>}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\therefore \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{<\vec{w}, \vec{v}_i>}{<\vec{v}_i, \vec{v}_i>} \right) \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{proj}_{\vec{v}_i} \vec{w} \right)$$

* Observação:

Se a base for ortonormal, então, adicionalmente ao que foi discutido acima, $<\vec{v}_i, \vec{v}_i> = 1$, pois os vetores são unitários. Desta forma:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{<\vec{w}, \vec{v}_i>}{<\vec{v}_i, \vec{v}_i>} \right) \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (<\vec{w}, \vec{v}_i>) \vec{v}_i$$