

Lista II - Física II - Gabarito

1) **Subcrítico:** Para o caso em que $\gamma^2 < 4\omega_0^2$ temos a solução mais geral da forma

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{com } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (1)$$

Supercrítico: O caso em que $\gamma^2 > 4\omega_0^2$ tem como solução mais geral

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}) \quad \text{com } \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (2)$$

Crítico: O caso em que $\gamma^2 = 4\omega_0^2$ tem como solução mais geral

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (A + Bt). \quad (3)$$

Se $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ temos que essas constantes são

$$\text{Subcrítico : } A = x_0 \quad e \quad B = -\frac{-2v_0 - \gamma x_0}{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}},$$

$$\text{Supercrítico : } A = -\frac{-2v_0 - x_0 \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} - \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}} \quad e \quad B = -\frac{2v_0 - x_0 \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}},$$

$$\text{Crítico : } A = x_0 \quad e \quad B = \frac{1}{2} (2v_0 + \gamma x_0).$$

Com isso podemos fazer os gráficos das diferentes situações, onde as constantes ω_0 e γ foram escolhidas arbitrariamente tomando o cuidado para respeitar as relações características em cada um dos casos. Foi tomado também $x_0 = 1$ e $v_0 = 2$.

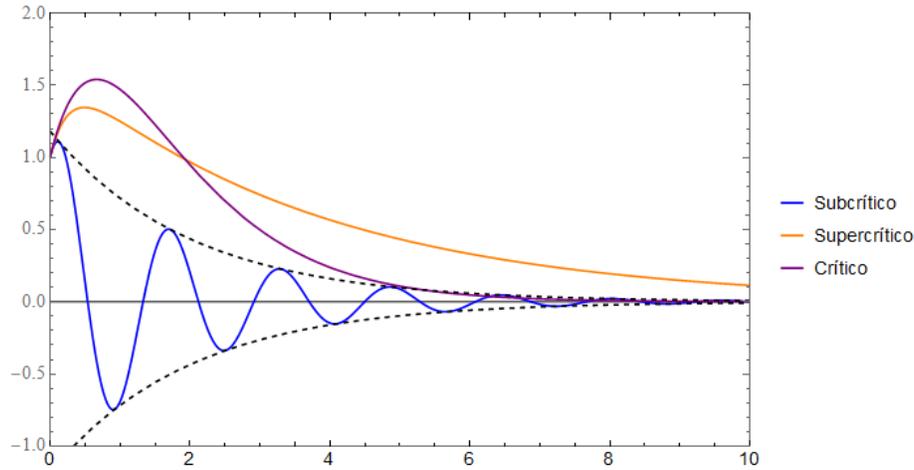


Figura 1: Plots dos diferentes casos de oscilações amortecidas

Nos três casos temos que $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, e portanto as soluções são transientes.

2)

Subcrítico: Para o caso em que $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ temos a solução mais geral da forma

$$Q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{com } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{e^{-\frac{Rt}{2L}}}{2L} ((2BL\omega - AR) \cos(\omega t) - (2AL\omega + BR) \sin(\omega t)).$$

Supercrítico: O caso em que $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ tem como solução mais geral

$$Q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} (Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}) \quad \text{com } \beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{e^{-\frac{Rt}{2L}}}{2L} (A(2\beta L - R)e^{\beta t} - B(2\beta L + R)e^{-\beta t}).$$

Crítico: O caso em que $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ tem como solução mais geral

$$Q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} (A + Bt)$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{e^{-\frac{Rt}{2L}}}{2L} (-AR + B(2L - Rt)). \quad (5)$$

O caso em que $L = R^2C/4$ corresponde ao caso em que temos amortecimento crítico.

3)

A solução particular se dá a partir de $z(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$, com $x_P(t) = \text{Im}[z(t)] = A \text{sen}(\omega t + \phi)$. Essas constantes vem da equação diferencial que $z(t)$ respeita, e assumem os valores

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2)} \quad e \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{\mu}{m} \quad e \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

A solução geral é dada por $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$, em que as soluções homogêneas são

Subcrítico: Caso em que $\mu^2 < 4mk$:

$$x_H(t) = e^{-\frac{\mu t}{2m}} (B \cos(\omega' t) + C \text{sen}(\omega' t)) \quad \text{com} \quad \omega' = \frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}. \quad (6)$$

Supercrítico: Caso em que $\mu^2 > 4mk$:

$$x_H(t) = e^{-\frac{\mu t}{2m}} (B e^{\beta t} + C e^{-\beta t}) \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}. \quad (7)$$

Crítico: Caso em que $\mu^2 = 4mk$:

$$x_H(t) = e^{-\frac{\mu t}{2m}} (B + Ct). \quad (8)$$

Para as condições iniciais $x(0) = x_H(0) + x_P(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_H(0) + \dot{x}_P(0) = 0$ temos que as constantes são

$$\text{Subcrítico :} \quad B = 1 - A \sin(\phi) \quad e \quad C = -\frac{A\gamma \sin(\phi) + 2A\omega \cos(\phi) - \gamma}{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$$\text{Supercrítico :} \quad B = -\frac{A\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \sin(\phi) + A\gamma \sin(\phi) + 2A\omega \cos(\phi) - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} - \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}$$

$$C = -\frac{A\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \sin(\phi) - A\gamma \sin(\phi) - 2A\omega \cos(\phi) - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} + \gamma}{2\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}$$

$$\text{Crítico :} \quad B = 1 - A \sin(\phi) \quad e \quad C = \frac{1}{2}(-A\gamma \sin(\phi) - 2A\omega \cos(\phi) + \gamma).$$

4) Supondo que esse sistema é rígido e que a angulação entre os fios é fixa em 60° , vamos considerar θ_1 como o ângulo entre a vertical e o fio da direita e θ_2 como o ângulo entre a vertical e o fio da esquerda, com $\theta_1 + \theta_2 = 60^\circ$.

$$L = K - U = \frac{I\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}_2^2}{2} + mgl\frac{l}{2}(\cos\theta_1 + \frac{\cos\theta_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1), \quad (9)$$

com I o momento de inércia do fio em relação ao eixo entrando no papel e que passa pelo ponto de fixação dos fios. Definindo o ângulo $\theta \equiv \theta_1 - 30^\circ$, as equações de movimento é

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl\sqrt{3}}{4I}\theta = 0 \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{mgl\sqrt{3}}{4I}. \quad (10)$$

5) A solução particular de de forma aproximada é

$$x_P(t) = \frac{\sin(\tan^{-1}(\frac{2\gamma}{3\omega}) + 2t\omega)}{4\gamma^2\omega^2 + 9\omega^4} - \frac{4\delta\omega(3\omega \sin(\tan^{-1}(\frac{2\gamma}{3\omega}) + 2t\omega) + \gamma \cos(\tan^{-1}(\frac{2\gamma}{3\omega}) + 2t\omega))}{(4\gamma^2\omega + 9\omega^3)^2} +$$

$$+ \frac{\delta\omega^2((8\gamma^3 + 90\gamma\omega^2) \cos(\tan^{-1}(\frac{2\gamma}{3\omega}) + 2t\omega) + 162\omega^3 \sin(\tan^{-1}(\frac{2\gamma}{3\omega}) + 2t\omega))}{(4\gamma^2\omega + 9\omega^3)^3} + O(\delta\omega^3).$$

6)

Ao realizarmos uma transformação nas coordenadas da forma

$$E_x = E'_x \cos\theta - E'_y \sin\theta \quad e \quad E_y = E'_x \sin\theta + E'_y \cos\theta$$

com

$$\tan(2\theta) = 2\frac{\cos\phi AB}{A^2 - B^2},$$

obtemos a equação da elipse

$$\frac{E_x'^2}{A'^2} + \frac{E_y'^2}{B'^2} = 1, \quad (11)$$

com A' e B' obtidos a partir de

$$\frac{\sin^2(\phi)}{A'^2} = \left(\frac{\cos^2\theta}{A^2} + \frac{\sin^2\theta}{B^2} - \cos\phi \frac{\sin(2\theta)}{AB} \right); \quad \frac{\sin^2(\phi)}{B'^2} = \left(\frac{\sin^2\theta}{A^2} + \frac{\cos^2\theta}{B^2} + \cos\phi \frac{\sin(2\theta)}{AB} \right).$$

O caso em que temos $\phi = \pi/2$ temos também $\theta = 0$, e portanto temos uma elipse com seus eixos alinhados aos eixos x-y. Se $\phi = 0$ temos a partir da de definição de E_x e E_y que

$$E_y = E_x \frac{B}{A}, \text{ com } -A < E_x < A,$$

e portanto a elipse se colapsa e temos uma reta com inclinação dada por $\tan(2\theta) = 2 \frac{AB}{A^2 - B^2}$. Se temos frequências diferentes os ciclos de oscilação de E_x e E_y são diferentes, e portanto não temos mais uma elipse, ainda que em alguns casos forme uma figura fechada dependendo da relação entre a frequências.

7) A solução é dada por

$$x(t) - l = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{\alpha}{k} t, \quad (12)$$

com as constantes determinadas a partir das condições iniciais

$$A = x_0 - l \quad e \quad B = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\alpha}{\omega k}. \quad (13)$$

8)

(a) As equações de movimento são dadas por

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - m\omega_0^2 x_1 \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - m\omega_0^2 x_2 \end{cases}$$

(b) As soluções são

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta_1) + B \cos(\omega t + \delta_2) \quad e \quad x_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta_1) - B \cos(\omega t + \delta_2).$$

com

$$|A| = \sqrt{q_1(0)^2 + \frac{\dot{q}_1(0)^2}{\omega_0^2}} \quad e \quad \delta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{-\dot{q}_1(0)}{\omega_0 q_1(0)} \right) \quad (14)$$

$$|B| = \sqrt{q_2(0)^2 + \frac{\dot{q}_2(0)^2}{\omega^2}} \quad e \quad \delta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{-\dot{q}_2(0)}{\omega q_2(0)} \right),$$

onde

$$q_1(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} \quad e \quad q_2(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2}, \quad (15)$$

(c) Para $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$ temos

$$A = \frac{x_0}{2}, \quad \delta_1 = 0, \quad B = -\frac{x_0}{2} \quad e \quad \delta_2 = 0$$

$$x_1(t) = -x_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right) \quad (16)$$

$$x_2(t) = x_0 \cos \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \right),$$

que podemos ver graficamente, no caso em que ω_0 é próximo a ω como

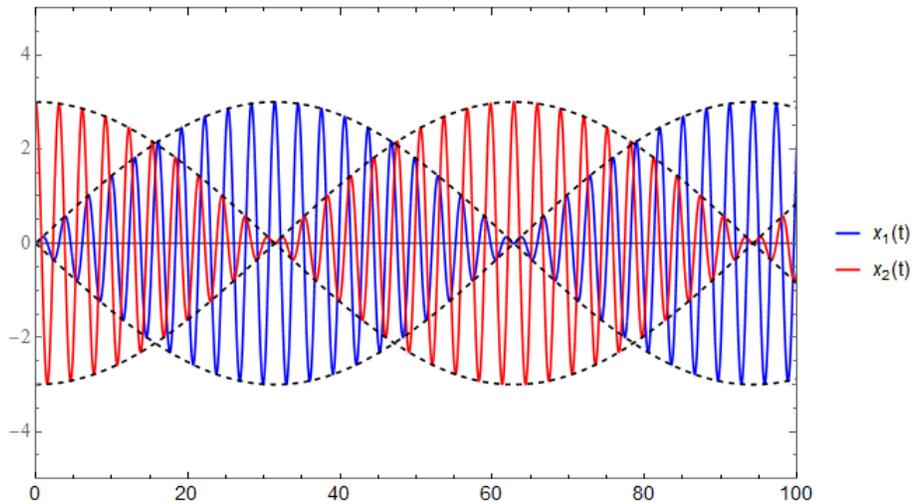


Figura 2: Plots de $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

9)

Podemos escrever as equações de movimento como

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \\ m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) \end{cases}$$

Os modos normais são soluções do tipo $x_i = A_i \cos(\omega t + \phi)$, em que ω adquire valores

$$\omega^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{3k}{m}$$

Os valores de A_i associados a essas frequências são, a menos de constantes multiplicativas,

$$\omega^2 = 0 \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \omega^2 = \frac{k}{m} \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \omega^2 = \frac{3k}{m} \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10)

(a) A equação de movimento desse corpo pode ser escrita como

$$m \ddot{u}(x_i, t) = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1})$$

(b) A equação de movimento é dada por

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m} \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial x^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial x^2},$$

onde foram utilizadas as relações $m = \rho Sh$ e $k = ES/h$.