Lista I - Física II - Gabarito

1)

(a) $x_a = 0$ e $x_b = 2x_1/3$.

(b)

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + U''(0)\frac{x^2}{2} + U'''(0)\frac{x^3}{6} = -U_1\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^3 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^2\right].$$

(c)

(d) Para uma partícula de massa m temos que a equação de movimento é dada por

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{U_1}{x_1^3}(3x^2 - 2xx_1) \tag{1}$$

(e)

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{dU}{dt} + m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$0 = \left(\frac{dU}{dx} + m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

(f)

$$U(x) = U\left(\tfrac{2x_1}{3}\right) + U'\left(\tfrac{2x_1}{3}\right)\left(x - \tfrac{2x_1}{3}\right) + U''\left(\tfrac{2x_1}{3}\right)\frac{(x - \frac{2x_1}{3})^2}{2} + U'''\left(\tfrac{2x_1}{3}\right)\frac{(x - \frac{2x_1}{3})^3}{6}$$

$$= -U_1\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^3 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^2\right]$$

2) O mínimo é $r = r_0$

$$\omega^2 = \frac{72U_0}{mr_0^2}. \tag{2}$$

3) $A^2 = C^2 + D^2$ e também $\tan(\phi) = -D/C$.

4)

$$\frac{4k}{3M}x + \ddot{x} = 0. \tag{3}$$

5) Subcrítico: Para o caso em que $b^2 < 4ac$ temos a solução mais geral da forma

$$x_H(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}\left(Acos(\omega t) + Bsen(\omega t)\right) \quad com \quad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \tag{4}$$

Supercrítico: O caso em que $b^2 > 4ac$ tem como solução mais geral

$$x_H(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right) \quad com \quad \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5}$$

Crítico: O caso em que $b^2 = 4ac$ tem $\alpha_+ = \alpha_-$ e portanto tem como solução mais geral

$$x_H(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}\left(A + Bt\right). \tag{6}$$

Olhando agora para a solução particular, temos que $x_P = \dfrac{F_0}{c}$ é solução, de modo que a solução geral é dada por $x(t) = x_H(t) + x_P$. Em cada um dos diferentes casos descritos temos que as constantes A e B dependem das condições iniciais. Tomando $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$ temos que os valores dessas constantes em cada um dos casos é

$$\textbf{Subcrítico}: \quad A = -\frac{F_0 - cx_0}{c} \quad e \quad B = \frac{b\,(c\,x_0 - F_0)}{c\sqrt{4ac - b^2}}$$

$$\textbf{Crítico}: \quad A = -\frac{F_0 - cx_0}{c} \quad e \quad B = \frac{b\,(c\,x_0 - F_0)}{2ac}$$

$$\textbf{Supercrítico}: \quad A = -\frac{F_0\sqrt{b^2 - 4ac} - cx_0\sqrt{b^2 - 4ac} - bcx_0 + bF_0}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$B = -\frac{F_0\sqrt{b^2 - 4ac} - cx_0\sqrt{b^2 - 4ac} + bcx_0 - bF_0}{2c\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

6)

(a) A equação de movimento é dada por

$$F\hat{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} = -kx\hat{x}$$

que tem como solução $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ com $\omega = \sqrt{k/m}$.

(b)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

7)

(a) A energia total é dada por

$$E = \frac{m}{2}A^2\omega^2$$

(b)

$$\overline{cos(\omega t)} = 0$$

$$\overline{sen(\omega t)} = 0$$

$$\overline{cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{sen^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$$

(c)

(d)

$$\overline{U} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\overline{\cos(\omega t + \phi)^2} = \frac{m}{4}A^2\omega^2$$

$$\overline{K} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\overline{\sin(\omega t + \phi)^2} = \frac{m}{4}A^2\omega^2$$

8)

(a) **Subcrítico**: Caso em que $\mu^2 < 4mk$:

$$x(t) = e^{-\frac{\mu t}{2m}} \left(Acos(\omega t) + Bsen(\omega t)\right) \quad com \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}. \tag{7}$$

Supercrítico: Caso em que $\mu^2 > 4mk$:

$$x(t) = e^{-\frac{\mu t}{2m}} \left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right) \quad com \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}. \tag{8}$$

(b)

$$\textbf{Subcrítico}: \quad A = x_0 \quad e \quad B = \frac{\mu\, x_0}{\sqrt{4mk - \mu^2}} = \frac{\mu\, x_0}{2\, m\, \omega}$$

$$\textbf{Supercrítico}: \quad A = -\frac{-kx_0\sqrt{\mu^2 - 4km} - k\mu x_0}{2k\sqrt{\mu^2 - 4km}} \quad e \quad B = -\frac{k\mu x_0 - kx_0\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2k\sqrt{\mu^2 - 4km}}$$

(c) No caso supercrítico temos um decaimento exponencial, e portanto não temos oscilação. No caso de amortecimento subcrítico faz sentido falarmos de oscilação quando a exponencial $e^{-\frac{\mu t}{2m}}$ não varia muito durante a oscilação do cosseno e do seno. Nesse caso, o período de oscilação é $T = 2\pi/\omega$ com ω definido na Eq. 7.

(d) A energia média nesse caso se dá por

$$\overline{E(t)} = \frac{ke^{-\frac{\mu t}{m}}}{4} \left(x_0^2 + \frac{\mu^2\, x_0^2}{4\, m^2\, \omega^2}\right) + \frac{m}{4} \left(\frac{x_0 k}{\omega m}\right)^2 e^{-\frac{\mu t}{m}}. \tag{9}$$

9)

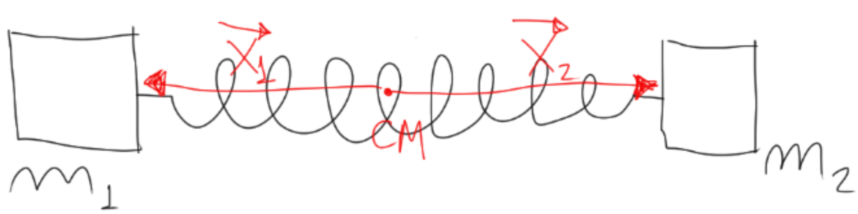

Figura 1: Esquema exercício 9

(a) Considerando no referencial do CM (inercial pois a soma das forças externas sobre o sistema é nula), temos que as equações de movimento são dadas por

$$\begin{array}{ll} (1) & m_1\ddot{x}_1\hat{x}_1 = -k((x_2+x_1)-l)\hat{x}_1 \\ (2) & m_2\ddot{x}_2\hat{x}_2 = -k((x_2+x_1)-l)\hat{x}_2 \end{array} \tag{10}$$

(b) Podemos escrever a coordenada relativa como $\vec{x} = \vec{x_2} - \vec{x_1}$ e definindo $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}$, a equação de movimento para a coordenada relativa é

$$\mu\frac{d^2(x-l)}{dt^2} = -k(x-l). \tag{11}$$

Nesse referencial a equação de movimento da coordenada do CM é simplesmente $\ddot{x}_{CM} = 0$.

(c)
$$\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt}\left(k(x-l) + \mu\ddot{x}\right) = 0. \tag{12}$$