SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. Introdução

Um sistema de equações diferenciais na *forma normal* é escrito na forma

$$
\begin{aligned}
x_1' &= g_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
x_2' &= g_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
x_n' &= g_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Alguns exemplos de sistemas apareceram aqui como modelos de circuitos elétricos e propagação de epidemias, como vimos. Uma observação importante é que uma equação de ordem maior que um na forma normal:

$$x^{(n)} = f(t, x, x\prime, \cdots, x^{(n-1)})$$

pode ser transformado no sistema equivalente:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1}' &= x_n \\
x_n' &= f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

Date: October 8, 2020.

Se as funções $g_1, g_2, \cdots, g_n$ que comparecem no sistema (1) são lineares nas variáveis $x, x_1, x_2, \cdots x_n$, temos o *sistema de equações diferenciais lineares:*

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + h_1(t)\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + h_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + h_n(t)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Se as funções $h_1(t), h_2(t), \cdots, h_n(t)$ são todas nulas, temos o *sistema linear homogêneo* associado a (2)

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n
\end{aligned} \tag{3}
$$

Se $\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{h}$ denotarem, respectivamente, as matrizes:

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21} & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \ddots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix}
$$

podemos escrever o sistema (2) na *forma matricial*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{4}$$

e o sistema homogêneo associado (3) na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{5}$$

Exemplo 1. *O sistema linear homogêneo:*

$$x' = 3x + 4y$$
$$y' = 5x - 7y,$$

pode ser escrito na forma matricial: $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, *sendo*

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Definição 2. *Uma solução de* (4) *no intervalo* I *é uma função a valores vetoriais.* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, *tal que as funções* $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$, *são soluções do sistema* (2) *no intervalo* I.

Exemplo 3.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, *sendo*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para sistemas de equações lineares vale o seguinte resultado de existência e unicidade

Teorema 4. *Suponhamos que as funções* $a_{11}(t), a_{21}(t), \cdots, a_{n1}(t), \cdots, a_{nn}(t)$ *e* $h_1(t), h_n(t)$ *sejam contínuas* *no intervalo I. Então, para cada vetor*

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

existe uma única solução

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

do problema (5)*, definida no intervalo I contendo* 0 *e satisfazendo a condição inicial $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0$.*

Muitas propriedades das soluções de (4) e (5) são análogas às obtidas para equações lineares de ordem mais alta. Em particular, vale o *Princípio da superposição*:

Lema 5. *Se $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são soluções de* (3) *e c_1, c_2 são constantes então $\boldsymbol{x}_h = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$ é solução de* (3)*.*

Lema 6.

- *Se $\bar{\boldsymbol{x}}$ é solução de* (2) *e $\boldsymbol{x}_h$ é solução de* (3) *então $y = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_h$ também é solução de* (2)*.*
- *Se $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são soluções de* (2)*, então e $\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ é solução de* (3)*.*

Como consequência, se $\mathbf{x}_p$ for uma solução *fixada* de (2), então *qualquer solução* de (2), será da forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$. sendo $\mathbf{x}_h$ uma solução de (3).

Lembremos agora a definição de dependência e independência linear.

Definição 7. *Dizemos que as funções (vetoriais)* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *definidas em um intervalo* I *são* linearmente dependentes *(L.D.) se existirem constantes não todas nulas,* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *tais que* $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \equiv 0$ *em* I *. Caso contrário, dizemos que* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$*.*

Equivalentemente, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *são* linearmente independentes *se a igualdade* $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n \equiv 0$ *em* I *implicar que* $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$*.*

As definições e resultados seguintes são análogos aos obtidos no caso de equações lineares de ordem 2. As demonstrações dos resultados também são similares e serão omitidas aqui.

Definição 8. *Se* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *são funções vetoriais (a valores em* $\mathbb{R}^n$*) no intervalo* I*, definimos o* determinante Wronskiano *de* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *em* I*, por*

$$W[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n](t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1^1(t) & \boldsymbol{x}_1^2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_1^n(t) \\ \boldsymbol{x}_2^1(t) & \boldsymbol{x}_2^2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_2^n(t) \\ \vdots & & & \\ \boldsymbol{x}_n^1(t) & \boldsymbol{x}_n^2(t) & \cdots & \boldsymbol{x}_n^n(t) \end{vmatrix}$$

Proposição 9. *Se* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *são funções vetoriais no intervalo* I*, linearmente dependentes, então* $W[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \equiv 0$ *em* I*.*

Lema 10. *Se* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *são soluções L.I. da equação* (3) *no intervalo* I*, então* $W[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \neq 0$*, para todo* $x \in I$*.*

Teorema 11. *Se* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *são soluções* linearmente independentes *de* (3) *então todas as soluções de* (3) *são da forma:*

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n, \quad c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ constantes reais .}$$

Observação 12. *Em vista do Teorema 11, para encontrar a solução geral da equação* (2)*, precisamos*

- *Encontrar uma solução particular de* (2).
- *Encontrar* n *soluções L.I. de* (3).

Além disso, n *soluções* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ *de* (3) *serão L.I. se* $W[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n](t) \neq 0$ *em algum ponto* $t \in I \Longleftrightarrow$ $W[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n](t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$.

2. Autovalores, autovetores e sistemas de EDOs lineares

Corolário 13. *Se* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *são* n *autovetores linearmente independentes da matriz* $n \times n$ $\boldsymbol{A}$ *e* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *são os autovalores correspondentes então uma solução geral do sistema homogêneo* $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *é dada por:*

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \quad c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ constantes reais} .$$

Em particular, isto ocorre se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *são autovetores associados aos autovalores distintos dois a dois* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Demonstração. Basta observar que $\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t} v_1, \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_2 t} v_2, \cdots, \mathbf{x}_n = e^{\lambda_n t} v_n$, são n soluções linearmente independentes do sistema, em vista do Teorema (11) . □

Exemplo 14. *Encontrar a solução geral do sistema:*

$$\frac{dx}{dt} = -4x + y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 5y - z$$
$$\frac{dz}{dt} = y - 3z$$

Solução. Na forma matricial, temos o sistema; $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo

$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. A equação característica é:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0.$$

$$det\,(\mathbf{A} + 3\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = -3$. e

$\mathbf{x}_1 = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma solução de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Para $\lambda = -4$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$det\,(\mathbf{A} + 4\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto $v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = -4$.

e $\mathbf{x}_2 = e^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é outra solução de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax}$.

Finalmente, para $\lambda = 5$,

$$det\,(\mathbf{A} - 5\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Portanto $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = 5$. e

$\mathbf{x}_3 = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ é outra solução de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax}$.

Portanto a solução geral é dada por:

$$\mathbf{x} = C_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$