MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

1. Matrizes

Vamos denotar matrizes por letras maíusculas em negrito, como $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}$ etc. Lembremos que uma matriz $m \times n$ A é um arranjo retangular de $m \times n$ elementos com m linhas e n colunas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Estaremos interessados principalmente em matrizes com *entradas* a_{ij} sendo números reais mas, para a teoria, especialmente para estudo dos autovalores e autofunções, é mais conveniente considerar matrizes com coeficients sendo, em geral, números *complexos*. Vamos também denotar por $\mathbf{A} = (a_{ij})$, a matriz $\mathbf{A}$ cuja entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna é a_{ij}.

Dada a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$, definimos

- A matriz $n \times m$ *transposta* $\mathbf{A}^t = (a_{ji})$.
- A matriz $m \times n$ *conjugada* $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})$., sendo $(\bar{a})_{ij}$ o complexo conjugado de $(a)_{ij}$.
- A matriz $n \times m$ *adjunta* $\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^t = (\bar{a}_{ji})$.

Estaremos especialmente interessados em matrizes *quadradas* de ordem n isto é matrizes com o mesmo nḿero n de linhas e colunas e matrizes com apenas 1 coluna ou *vetores coluna*.

Podemos definir diversas operações entre matrizes:

Date: October 13, 2020.

- Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é matriz $m \times n$, e $\lambda \in \mathbb{C}$. definimos a matriz *produto por escalar* $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} = (c_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.
- Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ são matrizes $m \times n$, definimos a *matriz soma* $\mathbf{C} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
- Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ é matriz $m \times l$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ é matrizes $l \times n$, definimos a *matriz produto* $m \times n$, $\mathbf{C} = (c_{ik}) = (\sum_j a_{ij}b_{jk})$.

(Vamos supor conhecidas as propriedades dessas operações).

A *matriz identidade* de ordem n $\mathbf{I} = d_{ij}$ é a única matriz tal que $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$, para toda matriz quadrada de ordem $\mathbf{A}$. Não é difícil mostrar que $d_{ij} = \delta_{ij}$.

Dizemos que a matriz quadrada de ordem n, $\mathbf{A}$ é *não singular* ou invertível, se existe uma matriz de ordem n, $\mathbf{A}^{-1}$, denominada, a *matriz inversa* de $\mathbf{A}$; tal que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Definimos o $\det \mathbf{A}$ da matriz quadrada de ordem n, $\mathbf{A} = (a)_{ij}$, por:

$$\det \mathbf{A} = \Pi_\sigma \Pi_i (-1)^{s(\sigma)}(a_{i\sigma(i)}),$$

onde σ varia no conjunto das permutações de n elementos e $s(\sigma)$ é a paridade de σ.

O determinante de $\mathbf{A}$ pode ser calculado de maneira recursiva:

(1) Se $n = 1$, então $\det \mathbf{A} = a$, sendo a a única entrada de $\mathbf{A}$.
(2) Se $n \geq 2$, $\det \mathbf{A} = \sum_i -1^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{M}_{ij} = \sum_j -1^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{M}_{ij}$, sendo $\mathbf{M}_{ij}$ a matriz obtida suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$.

O número $C_{ij} = -1^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{M}_{ij}$ é denominado *cofator* de a_{ij}. Se $\mathbf{C} = (C_{ij})$ e $\det \mathbf{A} \neq 0$, a inversa de $\mathbf{A}$ é dada por $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{C}^t$.

2. Sistemas lineares de equações algébricas

Consideremos agora o sistema linear com n equações e n incógnitas:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

Na forma matricial, temos o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

O sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

é o sistema *homogêneo* associado ao sistema (não homogêneo) (2).

Proposição 1. *Quanto às soluções dos sistemas* (2) *e* (3)*, temos a seguinte alternativa:*

- *Se $\boldsymbol{A}$ é invertível, então ambos os sistemas têm uma única solução, dada por $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.*
- *Se $\boldsymbol{A}$ é singular, o sistema* (3) *tem infinitas soluções e o sistema* (2) *tem solução, se e somente se $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ para toda solução $\boldsymbol{y}$ do* problema homogêno adjunto*:*

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

Nesse caso, as soluções de (2) *são todas da forma:* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_p + \xi$, *sendo* $\boldsymbol{x}_p$ *uma solução fixada de* (2) *e* ξ *uma solução qualquer do sistema homogêneo associado* (3).

Como conseguência da Proposição (1)

3. Autovalores e autovetores de matrizes

Definição 2. *Seja* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ *uma matriz* $n \times n$. *Dizemos que o escalar* λ *é um* autovalor *de* $\boldsymbol{A}$ *se existir um vetor* $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \neq 0$, *tal que* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. *O vetor* v *é denominado então um* autovetor *associado a* λ.

Agora, λ é autovalor e v autovetor associado se e somente se $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = 0$, sendo I a matriz identidade $n \times n$. Lembrando que a equação: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{Bx} = 0$ tem solução não trivial, se e somente se o $\det \mathbf{B} = 0$, obtemos a

Proposição 3. *Um escalar* λ *é autovalor da matriz* $\boldsymbol{A}$, *se e somente se* $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$.

A equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$ é a *equação característica* de $\mathbf{A}$ e os autovalores são também chamados *valores característicos* de $\mathbf{A}$. Observemos que $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$ é um polinômio de grau n em λ, denominado *polinômio característico* de $\mathbf{A}$ e os autovalores são de $\mathbf{A}$ são, portanto, as n raízes (contadas com multiplicidade) do polinômio característico.

Exemplo 4. *Encontrar os autovalores e autovetores da matriz:* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Temos:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \ ou \ \lambda = 6.$$

Portanto, os autovalores de $\mathbf{A}$ são -2 e 6.

Para encontrar os autovetores associados a -2, devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 3 \\ 5 & 3-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí obtemos $3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Atribuindo um valor arbitrário (não nulo) a x, obtemos um autovetor associado a $\lambda = -2$. Por exemplo, se $x = 1$, obtemos $y = -1$. e temos o autovetor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = -2$. será um múltiplo não nulo de v_1

Para encontrar os autovetores associados a 6, devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 1-(6) & 3 \\ 5 & 3-(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí obtemos $-5x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = (5/3)x$.

Atribuindo um valor arbitrário (não nulo) a x, obtemos um autovetor associado a $\lambda = 6$. Por exemplo, se $x = 3$, obtemos $y = 5$. e temos o autovetor $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5. \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = 6$. Será um múltiplo não nulo de v_2.

Proposição 5. *Uma combinação linear de autovetores de uma matriz $\boldsymbol{A}$ associados ao mesmo autovalor λ é um autovetor associado a λ (ou é o vetor nulo).*

Em outras palavras o conjunto formado pelos autovetores associados a um mesmo autovalor é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, denominado autoespaço associado a λ.

Proposição 6. *Autovetores de uma matriz $\boldsymbol{A}$ associados a autovalores distintos são sempre linearmente independentes.*

Prova. Por indução sobre o número n de autovalores distintos. Para $n = 1$, o resultado é imediato. Suponhamo-lo verdadeiro para $n = k$. Então se $v_1, v_2, \cdots, v_{k+1}$ são autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}$ distintos dois a dois, sejam $c_1, c_2, \cdots, c_{k+1}$ escalares tais que $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{k+1}v_{k+1} = 0$. Aplicando a matriz A, obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} c_1v_1 + c_2v_2, \cdots + \cdots + c_{k+1}v_{k+1} &= 0. \\ c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \cdots + c_{k+1}\lambda_{k+1}v_{k+1} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Multiplicando a primeira equação em (5) por λ_{k+1} e subtraindo da segunda, obtemos $(\lambda_{k+1} - \lambda_1)c_1v_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2)c_2v_2 + \cdots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)c_kv_k = 0$. Da hipótese de indução, obtemos, $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Usando novamente a primeira equação em (5), segue que $c_{k+1} = 0$. $\square$

Suponhamos agora que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ tenha n autovetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ linearmente independentes (Da proposição 6 isto sempre ocorre se as n raízes do polinômio característico são todas distintas.)

Se $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_n^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_n^2 \\ \ddots & & & \\ v_1^n & v_2^n & \cdots & v_n^n \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}v_1 & \mathbf{A}v_2 & \cdots & \mathbf{A}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ é *semelhante* à matriz *diagonal* com seus autovalores na diagonal principal. A *matriz de semelhança* $\mathbf{B}$ é a matriz cujas colunas são os n autovetores L.I. de $\mathbf{A}$.

Se não existirem n autovetores linearmente independentes a matriz $\mathbf{A}$ não será semelhante a uma matriz diagonal. Para descrever o que ocorre neste caso, consideremos novamente o o polinômio característico de $\mathbf{A}$.

$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} + \lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \det(A - \lambda)$ o polinômio característico de A. Então $p(\lambda)$ pode ser decomposto como produto de termos de grau 1.

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as raízes de p (complexas, algumas eventualmente repetidas).

Definição 7. *A multiplicidade* algébrica *de λ_i é o número de vezes que λ_i se repete na decomposição acima.*

A multiplicidade geométrica *de λ_i é a dimensão do autoespaço associado a λ_i.*

Podemos ver então que a existirá uma base formada por n autovetores de $\mathbf{A}$ se, e sómente se a multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i coincidir com sua multiplicidade geométrica. Se isto não ocorrer o "melhor que podemos fazer é encontrar uma base formada por *autovetores generalizados* de $\mathbf{A}$.

Definição 8. *Diremos que v é autovetor generalizado de $\boldsymbol{A}$, associado ao autovalor λ se uma das seguintes alternativas ocorrer:*

- *v é autovetor de $\boldsymbol{A}$.*
- *$(\boldsymbol{A} - \lambda)v = w$, sendo w um autovetor generalizado de $\boldsymbol{A}$.*

Pode-se demonstrar que sempre existem n autovetores generalizados L.I. de $\mathbf{A}$. Usando este fato, um procedimento análogo ao descrito acima, permite mostrar que $\mathbf{A}$ é sempre semelhante a uma matriz da forma $\mathbf{D} + \mathbf{N}$ sendo $\mathbf{D}$ uma matriz na forma diagonal com os autovalores de $\mathbf{A}$ na diagonal $\mathbf{N}$ é uma matriz *nilpotente* de ordem $m \leq n$, isto é, $\mathbf{N}^m = 0$ e $\mathbf{D}$ e $\mathbf{N}$ *comutam*, isto é, $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$.

Para evitar complicações na notação, vamos apenas ilustrar o procedimento para um caso particular. Suponhamos que $n = 3$ e $\mathbf{A}$ possui um 'unico autovalor λ de multiplicidade geométrica 1 Nesse caso existirá um autovalor v_1 associado a λ e autovetores generalizados v_2 e v_3 tais que:

$Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$, $Av_3 = \lambda v_3 + v_2$.

Se $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}v_1 & \mathbf{A}v_2 & \mathbf{A}v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 & \lambda v_2 + v_1 & \lambda v_3 + v_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \right) \mathbf{B} \\
&= (\mathbf{B} + \mathbf{N})\mathbf{B})\,.
\end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$, e as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{N}$, têm as propriedades afirmadas.