

AULA MECÂNICA 5/10 ①

SISTEMAS com 2 GRAUS DE LIBERDADE

$$X = (x_1, x_2) \quad X: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$$

$$(1) \ddot{X} = F(X)$$

SISTEMA DE FORÇAS
POSICIONAIS 1 PTO
em $\mathbb{E}^2$.

QUANDO O SISTEMA (1)
PODE SER ESCRITO NA FORMA.

$$\ddot{X} = -\nabla U$$

$$F: \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2 \text{ ABERTO} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad C^1$$

$$U: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

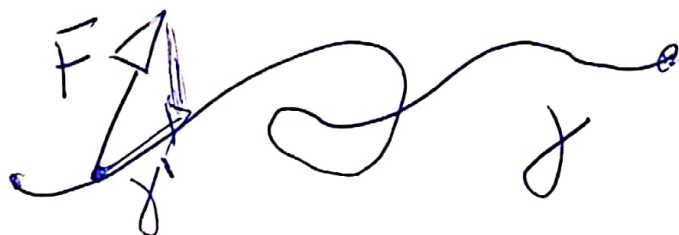
$$F(X) = -\nabla U(X)$$

NESTE CASO, VALE A CONSERVAÇÃO
DA ENERGIA. $E(X, \dot{X}) = \frac{1}{2} \|\dot{X}\|^2 + U(X)$

É CONSTANTE NAS SOLUÇÕES

(2)
 $\gamma: I \rightarrow \Omega$ UMA CURVA C^1
 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

DEFINIMOS TRABALHO DA FORÇA F SOBRE γ



TRABALHO

$$W(F, \gamma) = \int_a^b \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds =$$

$$= \int_a^b \left\langle F(\gamma(s)), \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} \right\rangle \cdot \|\gamma'(s)\| ds$$

• CONDIÇÕES NECESSÁRIAS P/ UMA FORÇA SER CONSERVATIVA É:

$$F = (F_1, F_2)$$

$$F_1 = - \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$F_2 = - \frac{\partial V}{\partial x_2}$$

⇔

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0 \dots$$

EXISTEM EXEMPLOS ONDE.

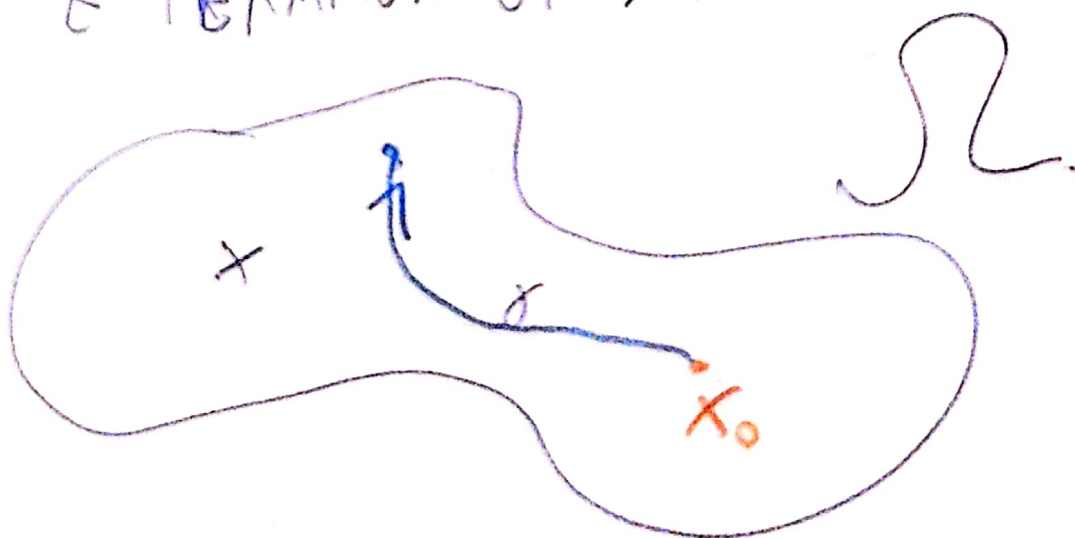
(3)

VALE $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ MAS F NÃO É

∇U P/ NINGUÉM. (DEPENDE DO DOMÍNIO DE DEFINIÇÃO DE F)

• PROPOSIÇÃO: SE $W(F, \gamma)$ SÓ DEPENDE DOS PONTOS INICIAIS E FINAIS DE γ ENTÃO F É CONSERVATIVA! ~~SE~~ (ASSUMINDO Ω CONEXO).

$U(x) = -W(F, \gamma)$ ONDE γ É UMA CURVA QVG INICIA EM UM x_0 FIXO E TERMINA EM x .



EXERCÍCIO:

(4)

Mostre que F é campo de forças
conservativo se, e só se,

$\forall \gamma$ curva fechada, $W(F, \gamma) = 0$.

$\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

EXERCÍCIO: ~~se~~ se Ω é simplesmente

convexo e $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \quad \forall x \in \Omega \Rightarrow$

F é conservativo.

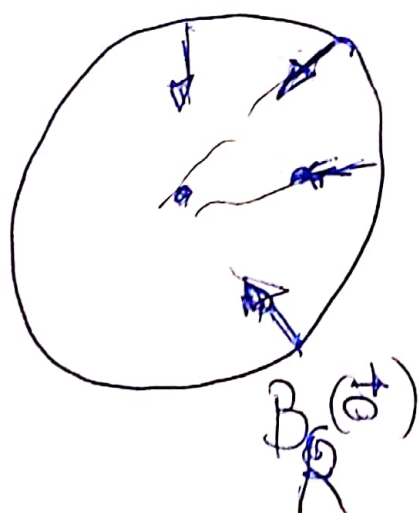
Dica: ~~se~~ use o Teorema de Green.

CAMPOS CENTRAIS:

(5)

~~Se~~ $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é dito um campo central de forças se.

$$F(x) = \phi(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$$



Proposição: Se F é central,
então F é conservativo.

Defino $U(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$

$$U(R) = - \int_0^R \phi(s) ds$$

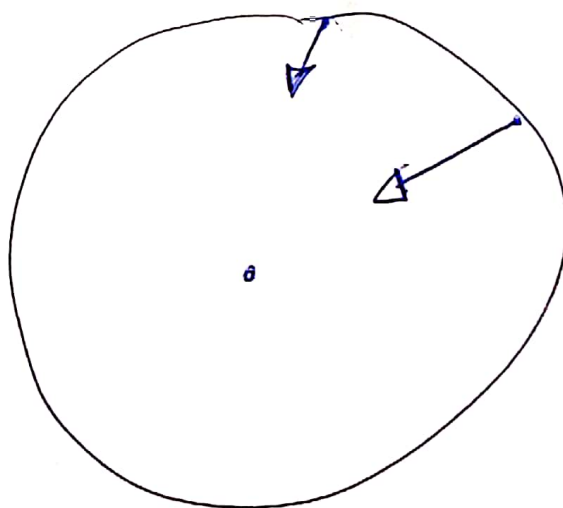
$$U(X) = U(\|X\|).$$

6

CAMPO DE FORÇAS QUE APONTA P/ O CENTRO.

$$F(X) = -W(X) \cdot \frac{X}{\|X\|}$$

$$W: \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}.$$



EXEMPLO.

$$F(x_1, x_2) = -x_1^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

EXERCÍCIO: MOSTRE QUE, SE F APONTA P/ O CENTRO E É CONSERVATIVA, ENTÃO F É CENTRAL.

MOMENTO ANGULAR:

$X: I \rightarrow \Omega$ SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\ddot{X} = F(X) \quad (1)$$

DEFINIMOS O MOMENTO ANGULAR DA SOLUÇÃO
NO TEMPO t COMO:

$$M(t) = X(t) \wedge \dot{X}(t) =$$

$$X_1(t) \dot{X}_2(t) - X_2(t) \dot{X}_1(t).$$

$$X = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\dot{X} = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{x}_2 \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$$X \wedge \dot{X} = (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) \vec{k} + 0 \vec{i} + 0 \vec{j}$$

PROPOSIÇÃO: SE F É UM CAMPO DE

VECTORES CENTRAL, ENTÃO O

MOMENTO ANGULAR DE TODA SOLUÇÃO DE (1)
É CONSTANTE:

$$M(t) = X(t) \wedge \dot{X}(t)$$

$$\dot{M}(t) = \dot{X}(t) \wedge \dot{X}(t) + X(t) \wedge \ddot{X}(t) \quad *$$

$$\frac{d}{dt} (f(t) \wedge g(t)) = \left(\frac{d f(t)}{dt} \right) \wedge g(t) + f(t) \wedge \frac{d g(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (X_1(t) \dot{X}_2(t) - X_2(t) \dot{X}_1(t)) =$$

$$\begin{aligned} & \dot{X}_1(t) \dot{X}_2(t) - \dot{X}_2(t) \dot{X}_1(t) + \\ & X_1(t) \ddot{X}_2(t) - X_2(t) \ddot{X}_1(t) = \dot{X} \wedge \dot{X} + X \wedge \ddot{X} \end{aligned}$$

*

(9)

$$\dot{m}(x) = 0 \neq X \wedge \ddot{X} = X \wedge \frac{\phi(\|X\|)}{\|X\|} X =$$

$$= \frac{\phi(\|X\|)}{\|X\|} \cdot (X \wedge X) = 0.$$

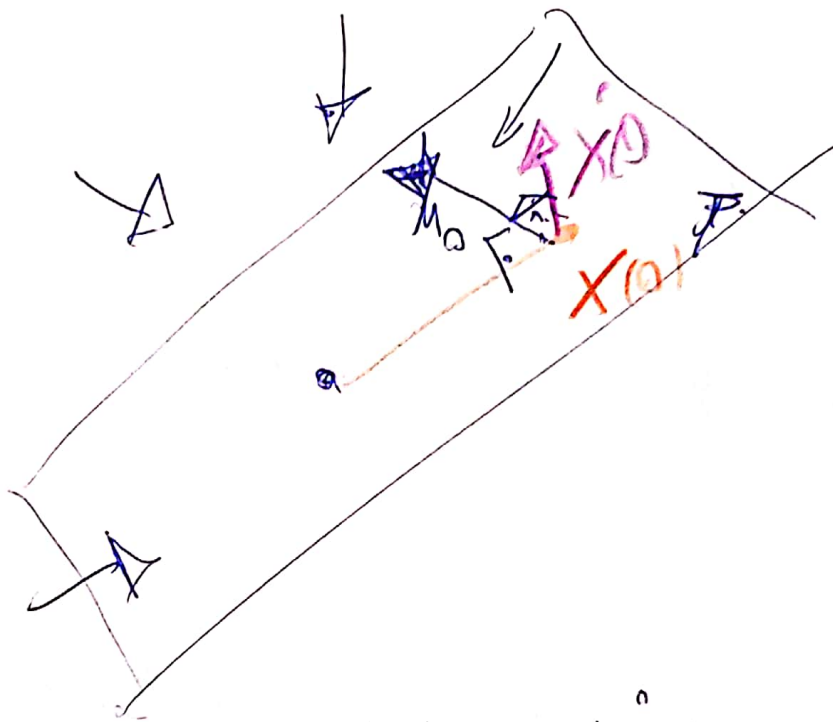
Em $R_{\neq}^3$ (CAMPO CENTRAL, TENOS (2)
 INTEGRAIS PRIMEIRAS DO SISTEMA: A ENERGIA
 TOTAL E O MOMENTO ANGULAR DA
 SOLUÇÃO.

$$E(X, \dot{X}) = \frac{1}{2} \|\dot{X}\|^2 + U(X)$$

$$M(X, \dot{X}) = X \wedge \dot{X}$$

PROPOSIÇÃO: SE $F: R_{\neq}^3 \rightarrow R^3$ É UM CAMPO
 DE FORÇAS CENTRAL, ~~EXISTE~~ É $X: I \subset R \rightarrow R_{\neq}^3$
 É UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES MECÂNICAS,
 ENTÃO

EXISTE UM PLANO BIDIMENSIONAL.
 TAL QUE $X(t) \in p$, $\forall t$. $\mathbb{R}^3 \cdot p$ (10)
 ONDE p CONTÉM $\{\vec{a}, X(0), \dot{X}(0)\}$.



DEM: $M(t) = X(t) \wedge \dot{X}(t)$. É CONSTANTE

$M_0 \Rightarrow X$ É SEMPRE PERPENDICULAR A
 M_0 .

INTEGRAIS PRIMEIRAS CAMPOS CENTRAIS.

(11)

DIM 2.

$$\begin{aligned} a) & E(X, \dot{X}) \\ b) & X_1 \dot{X}_2 - X_2 \dot{X}_1 \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{l} 2 \text{ INTEGRAIS} \\ \text{PRIMEIRAS.} \end{array}$$

DIMENSÃO REDUZIDA DE ONDE SE ENCONTRA
A SOLUÇÃO É 2

EXPLICANDO MELHOR:

⊗ SISTEMA MECÂNICO É JÁ DE FÍNITO
COMO UM SISTEMA DE EDOs
AUTÔNOMO EM $\mathbb{R}^4$

UM
SUBCONJUNTO
DE

$$\begin{aligned} Y_1 &= \dot{X}_1 \\ Y_2 &= \dot{X}_2 \end{aligned}$$

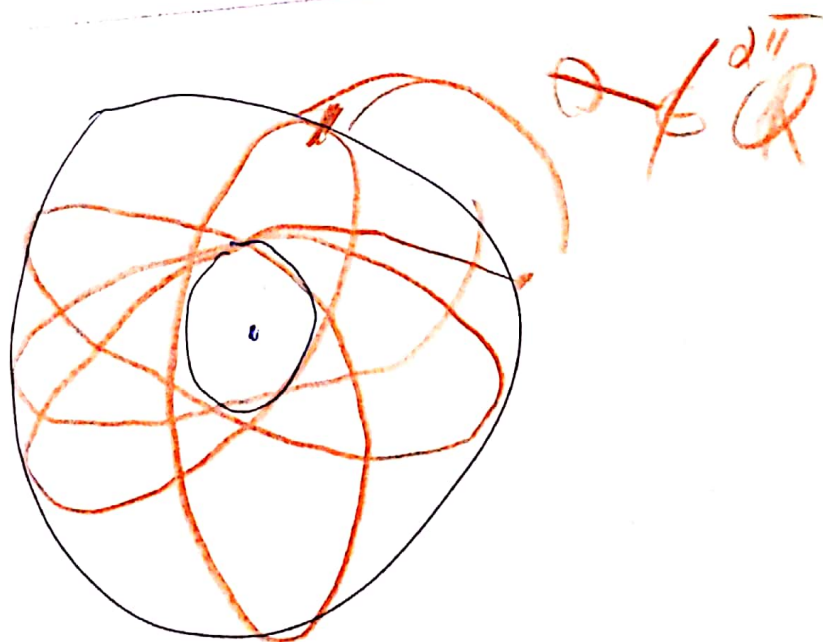
$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= Y_1 \\ \dot{X}_2 &= Y_2 \\ \dot{Y}_1 &= F_1(X) \\ \dot{Y}_2 &= F_2(X) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ F_1(X) \\ F_2(X) \end{pmatrix}$$

(12)

$$(X, Y) = G(X, Y)$$

Como E e M são constantes,
Toda solução se encontra restrita.
A interseção de 2 superfícies
de nível em $\mathbb{R}^4$.



Dim 3 Forças Centrais.

① SISTEMA EQUIVALENTE A UM
SISTEMA DE ENOS EM $\mathbb{R}^6$.

(13)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 & \dot{y}_1 &= F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= y_2 & \dot{y}_2 &= F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= y_3 & \dot{y}_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$G(X, Y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$(X, Y) = G(X, Y)$$

FORÇAS CENTRAIS

(14)

INTEGRAIS PRIMEIROS

$$E: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad 3 \text{ INTEGRAIS}$$

$$M_1 = \cancel{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1} \quad x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$$

$$M_2 = x_1 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_1$$

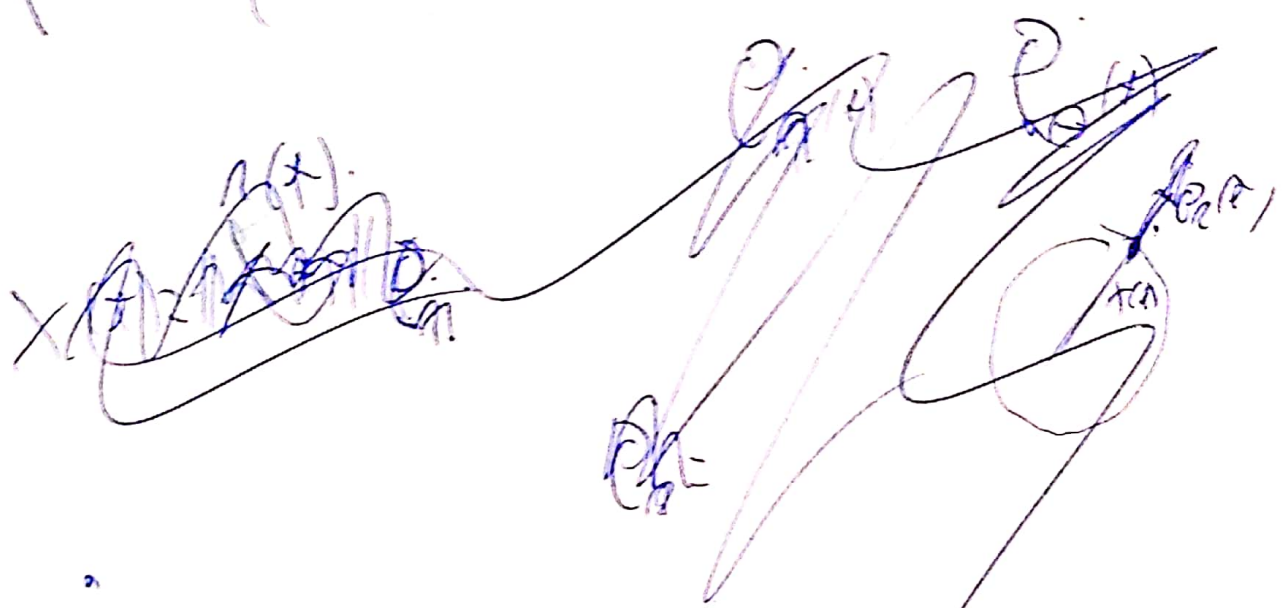
$$M_3 = x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2$$

$$\vec{M}_0 = \cancel{M_1(0)} \quad \cancel{M_2(0)} \quad \cancel{M_3(0)}$$

$$\vec{M}_0 = (M_3(0), M_2(0), M_1(0)).$$

MOMENTO ANGULAR É CONSERVADO

$$X(t) = (r(t), \theta(t))$$

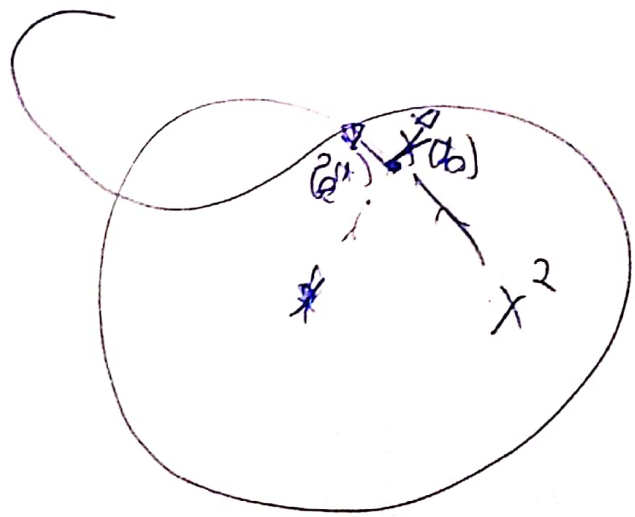


$$\dot{X} = \dot{r}(t)\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

DEFINIMOS $X(t) = r(t) \cdot \hat{e}_r(t)$

$$r(t) = ||X(t)||$$

$$X: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\dot{X}(t) = \dot{\lambda}(t) \cdot \vec{e}_\lambda(t) + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t)$$

(16)

~~$\dot{X}(t) = \dot{\lambda}(t) \vec{e}_\lambda(t)$~~

$$M(t) = X(t) \wedge \dot{X}(t) =$$

$$= \lambda(t) \vec{e}_\lambda(t) \wedge (\dot{\lambda}(t) \vec{e}_\lambda(t) + \lambda(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t))$$

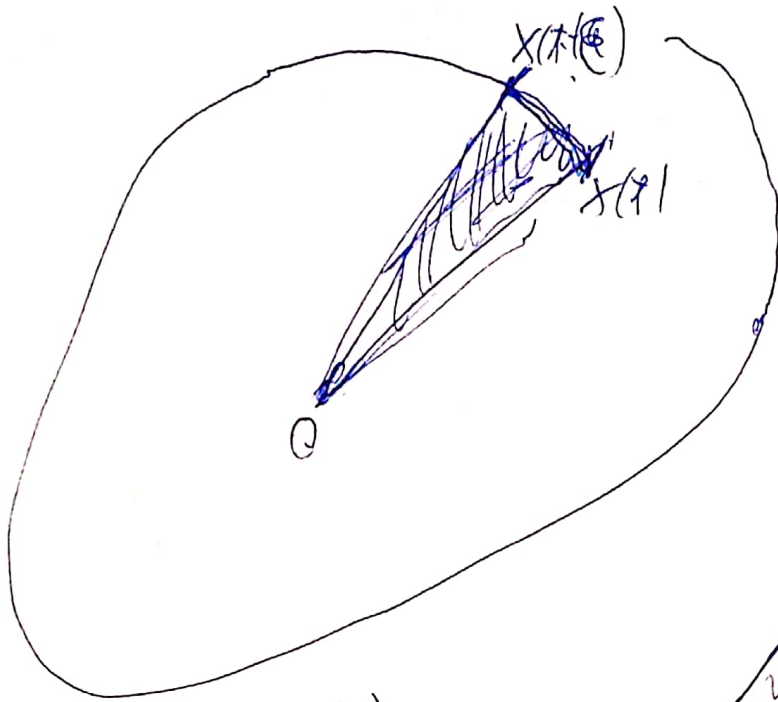
$$= \lambda(t) \dot{\lambda}(t) (\vec{e}_\lambda(t) \wedge \vec{e}_\lambda(t)) +$$

$$\lambda(t) \cdot \lambda(t) \dot{\theta}(t) \cdot (\vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_\theta)$$

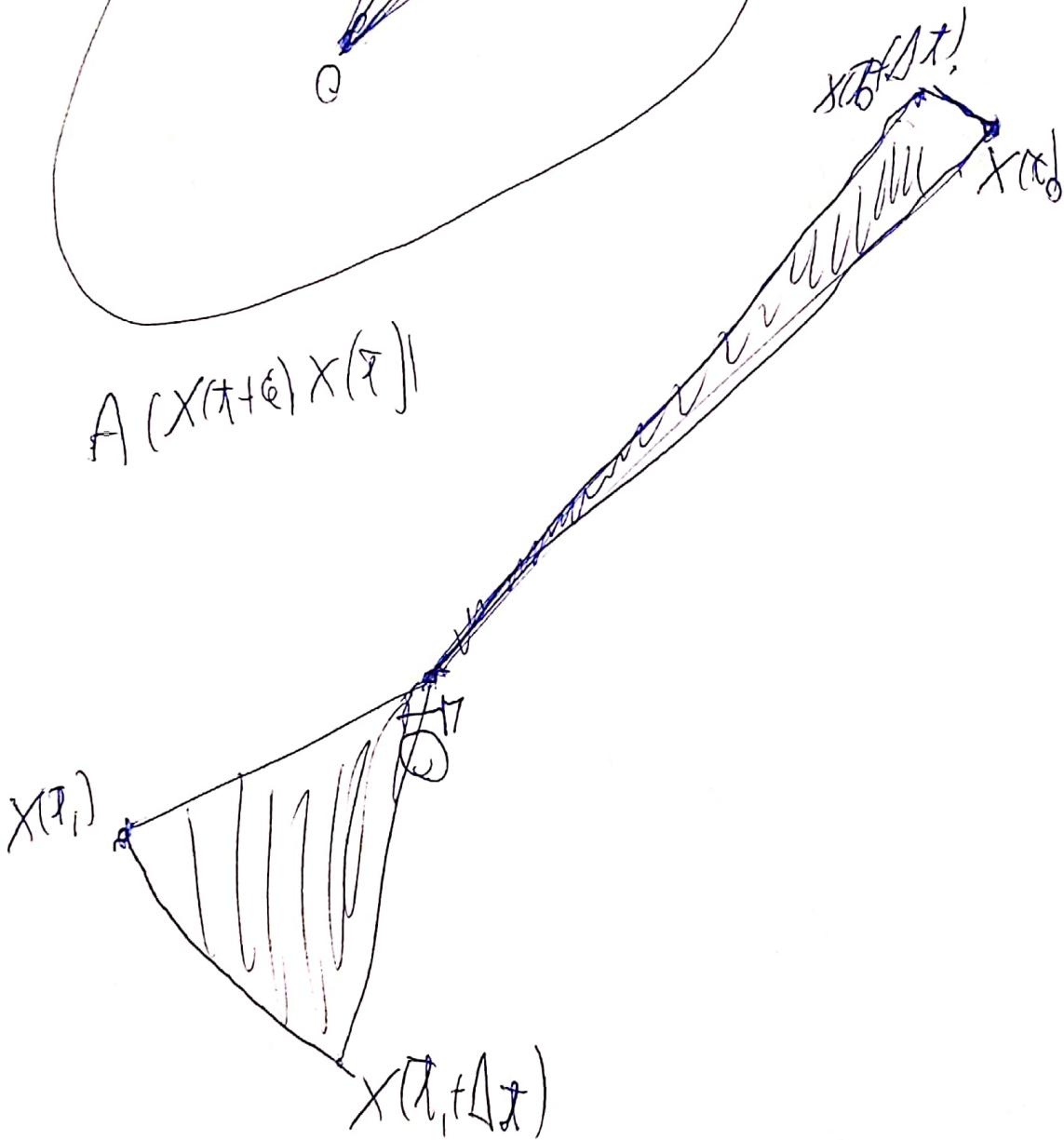
$$= \boxed{\lambda^2 \dot{\theta} \vec{e}_\lambda \wedge \vec{e}_\theta}$$

cte

$$M(t) \equiv M_0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2(t) \cdot \dot{\theta}(t) \equiv M_0}$$



$$A(x(t+\Delta t), x(t))$$



TEOREMA: SE F É UM CAMPO CENTRAL. (10P)
 X É UMA SOLUÇÃO:

ENTÃO, ~~POR~~ A ÁREA LIMITADA.

~~POR~~ POR :

SEGMENTO $\overrightarrow{OX(t)}$
SEGMENTO $\overrightarrow{OX(t+\epsilon)}$

CURVA $X: [t, t+\epsilon]$ É
PROPORCIONAL ϵ E NÃO
DEPENDENTE DE t .

