Relação de Equivalência e Partição

(precisa ser complementado c/ TIC6 - Rel de Eq.)

- O próximo "tipo" de relação importante que veremos é a relação de equivalência.

- Acredito que todos vocês já viram a definição de relação de equivalência, pelo menos uma vez, no curso de **Á**lgebra, por exemplo.

- Vamos primeiro lembrar a definição e alguns conceitos e notações relacionados. (Veja TIC6 para algumas propriedades importantes)

<u>Def</u>: Uma relação E em um conjunto A é uma <u>relação de equivalência</u> em A se E satisfaz as seguintes propriedades:

i) E é <u>reflexiva</u>, ou seja, xEx $\forall x \in A$

ii) E é <u>simétrica</u>, ou seja $xEy \to yEx$ $\forall x, y \in A$

iii) E é <u>transitiva</u>, ou seja, xEy e $yEz \to xEz$ $\forall x, y, z \in A$.

<u>Def</u>: Seja E uma relação de equivalência em um conjunto A.

i) Se aEb dizemos que a <u>é equivalente a b</u> (módulo E)

ii) Se $a \in A$, $[a]_E = \{x \in A : aEx\}$ é a <u>classe de equivalência</u> de a (módulo E).

<u>Obs</u>: 1. É usual omitir o "módulo E" nas definições acima, quando está claro qual é a relação E.

2. Como E é simétrica, $[a]_E = \{x \in A : aEx\} = \{x \in A : xEa\}$.

<u>Def</u>: Se E é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, o conjunto

$A/_E = \{[x]_E : x \in A\}$ (ou seja, o conjunto das classes de equivalência determinadas por E)

é chamado de <u>conjunto</u> <u>quociente</u> de A por E.

<u>Exemplo</u>: $x E y$ se e somente se $3 | x - y$, $x, y \in \mathbb{Z}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Quais são as classes de equivalência? E quem é $\mathbb{Z}/_E$

. As relações de equivalência aparecem em todas as áreas da matemática.

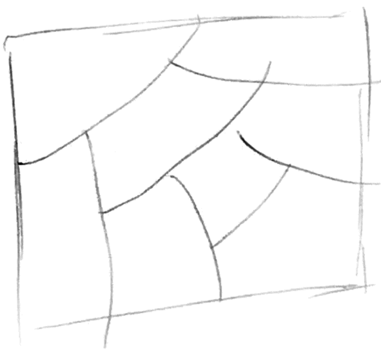
Mas quando elas são usadas? Para que serve?

Ela é usada quando queremos juntar todos os objetos que tem uma certa propriedade em um bloco só, e vê-los como um único objeto; todos os objetos dentro de um mesmo bloco se tornam equivalentes e são tratados em bloco (ou pegando um elemento do bloco, mas é irrelevante qual elemento do bloco é escolhido, pode escolher qualquer um para "representar" que não vai alterar o que está sendo feito)

- Um exemplo informal:

Nos jogos olímpicos todos os atletas são divididos em países/nações, eles formam vários blocos. Quando olhamos o quadro de medalhas, por exemplo, vemos uma lista de países, ou seja, desses blocos. Para a contagem, o que interessa é o bloco que o atleta representa e não cada um deles individualmente; todos os atletas de um mesmo bloco são "equivalentes".

- Colocando em termos mais geral, usando conjuntos, o que estamos fazendo é:



Seja A um conjunto qualquer.

Dividimos A e vários subconjuntos, pensamos em todos os elementos de um mesmo subconjunto como equivalentes, e para certas coisas que nos interessa, usamos o subconjunto (como um todo) e não os elementos de cada subconjunto.

Para funcionar bem essa divisão "em blocos", ou seja, em subconjuntos, queremos que:

- ninguém fique de fora, ou seja a união de todos os elementos dos subconjuntos (blocos) tem que ser A.
- nenhum bloco (subconjunto) pode ser vazio
- nenhum elemento pode estar em dois desses blocos (nenhum atleta pode representar dois países), para evitar ambiguidades/"conflitos"

• Chegamos assim na definição de partição:

<u>Def</u>: Dados um conjunto A e $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(A)$, (ou seja, $\mathcal{P}$ é uma coleção de subconjuntos de A), dizemos que $\mathcal{P}$ é uma partição de A se satisfaz as seguintes propriedades:

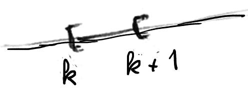
(i) $X \neq \emptyset \quad \forall X \in \mathcal{P}$

(ii) $\forall\, X, Y \in \mathcal{P}$, se $X \neq Y$, então $X \cap Y = \emptyset$

(iii) $\bigcup \mathcal{P} = A$.

<u>Exemplos</u>: 1) $\{\{2k;\ k \in \mathbb{N}\}, \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}\}$ é uma partição de $\mathbb{N}$

2) $\{[k, k+1[\ \subset \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma partição de $\mathbb{R}$



<u>Exemplo</u>: Considere a relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ dada anteriormente:

$$x E y \iff 3 \mid x - y \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Note que $x E y \iff 3 \mid x - y \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $x - y = 3k$

$\iff x = 3k + y \iff \underset{\hookrightarrow y = 3k' + 1}{x = 3k + 3k' + 1} = 3(k+k') + 1$

$\iff x$ e y tem o mesmo resto quando fazemos a divisão por 3.

$\therefore [x]_E = \{y \in \mathbb{Z} ;\ y$ e x tem o mesmo resto quando dividimos por $3\}$

Logo $[0]_E = \{y \in \mathbb{Z} : 3 \mid y\}$

$[1]_E = \{y \in \mathbb{Z} : y = 3k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}\}$

$[2]_E = \{y \in \mathbb{Z} : y = 3k + 2$, para algum $k \in \mathbb{Z}\}$

Como o resto pela divisão por 3 só pode ser 0, 1 ou 2, esses serão as únicas classes de equivalência. Ou seja, $\mathbb{Z}/_E = \{[0]_E, [1]_E, [2]_E\}$ $(= \mathbb{Z}_3)$

Verifique que $\mathbb{Z}/_E$ é uma partição de $\mathbb{Z}$ (exercício).

Note que poderíamos definir $\mathbb{Z}/_E$ sem falar de relação de equivalência. Poderíamos simplesmente definir os conjuntos

$A = \{y \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid y\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} : y = 3k+1$, p/ algum $k \in \mathbb{Z}\}$ e

$C = \{y \in \mathbb{Z} : 3k+2$, p/ algum $k \in \mathbb{Z}\}$ e definir

$$\mathbb{Z}/_E = \{A, B, C\}.$$

Isso vai ser verdade para qualquer relação de equivalência.

· De modo mais geral temos:

relação de equivalência $\rightsquigarrow$ partição ($A/_E$ é partição)

partição $\rightsquigarrow$ rel. de equivalência (*)

veja exercício 5 do TIC6 (i.e., dada uma partição podemos definir uma rel. de eq. correspondente)

Ou seja, "relação de equivalência" e "partição" de certa forma definem o mesmo conceito, são "equivalentes".

⇒ Vá agora para o "TIC6 - Relações de Equivalência"

Os exercícios 3 - 5 são para mostrar estes fatos, que lá estão enunciados de uma forma precisa (acima foi apenas dada uma idéia, olhar o TIC6, principalmente o exercício 5 para (*)). Também apresentam propriedades importantes sobre as classes de equivalência

· Quando trabalhamos com uma relação de equivalência (ou partição), muitas vezes é conveniente tomarmos "um representante" da classe de equivalência (ao invés de trabalhar com o conjunto todo)

<u>Def</u>: Se E é uma relação de equivalência em A e $a \in [x]_E$, a é um <u>representante</u> da classe. Um conjunto $X \subset A$ é um <u>conjunto de representantes</u> se possui um elemento de cada classe de equivalência de E.

· Ao se trabalhar com representantes é importante poder mostrar que o que se está fazendo "não depende da escolha de representante".
Isto é o que tem que ser feito em b) do seguinte exercício:

<u>Exercício</u>: Seja $f: A \to B$ uma função sobrejetora. Defina a relação E em A por $a E b \iff f(a) = f(b)$

(a) Mostre que E é uma relação de equivalência em A.

(b) Define $h: A/E \to B$ por $h([a]_E) = f(a)$. Mostre que h está bem definida, ou seja, que de fato é uma função.

(<u>Obs</u>: Note que quando definimos $h([a]_E) = f(a)$, foi feita uma escolha de representantes quando escrevemos "$f(a)$").