

Lembrar: $(V, +, \cdot)$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$$

DEF: SUBESPACO GERADO por S

$$[S] = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \mid a_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n\}$$
$$= \{ \text{TODAS as CL de vetores de } S \}$$

$[S]$ é um subespaço de V .

OBSERVAÇÃO 1

$$[\emptyset] = \{0\}$$

OBSERVAÇÃO 2.

Se S é infinito, $[S] \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists v_1, \dots, v_k \in S$
e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k\}$

$v \in [S] \Leftrightarrow \exists v_1, \dots, v_k \in S$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$
tais que $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$.

$[S] = \{ \text{TODAS as CL } \boxed{\text{FINITAS}} \text{ de vetores de } S \}$

Propriedades do $[S]$, $S \subset V$.

(1) $S \subset [S]$

É claro! Se $u \in S$, $u = 1 \cdot u$ (logo, existe $\underline{u} \in S$ e $\underline{1} \in \mathbb{R}$ tal que $u = \underline{1} \cdot \underline{u}$).

(2) Provar que $[S] = [[S]]$.

(i) Provar que $[S] \subset [[S]]$. Isso sai por (1); pelo, seja $T = [S]$.
Então $[T] \supset T \Rightarrow [S] \subset [[S]]$.

$\hookrightarrow$ por (1)

(ii) Para provar que $[[S]] \subset [S]$, vamos observar que:

(*) "Se W é um subespaço de V e se $S \subset W$, então $[S] \subset W$."

Dem: Sejam $v_1, \dots, v_n \in S \subset W$. Então, se $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ temos que $a_i v_i \in W$ para todo $i = 1, \dots, n$, pois W é subespaço.

$$a_1 v_1 \in W \text{ e } a_2 v_2 \in W \xRightarrow{W \text{ subespaço}} a_1 v_1 + a_2 v_2 \in W.$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 \in W \text{ e } a_3 v_3 \in W \xRightarrow{W \text{ subespaço}} (a_1 v_1 + a_2 v_2) + a_3 v_3 \in W$$

(A formalização é por indução finita em n .

Se: $n=1 \Rightarrow a_1 u_1 \in W$ (base da indução)

Hipótese de Indução: Suponha que $k \geq 1$ e que $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \in W$

(Se provarmos que HI $\Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_{k+1} u_{k+1} \in W$, então
pelo PIF, a afirmação será verdadeira para todo $n \geq 1$.)

Mas $\underbrace{(a_1 u_1 + \dots + a_k u_k)}_{\in W} + \underbrace{a_{k+1} u_{k+1}}_{\in W} \Rightarrow a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} \in W$
W subespaço

Assim está provada a afirmação (*).

Agora $[S] \subset [S]$ e $[S]$ é subespaço $\Rightarrow [[S]] \subset [S]$.

Observação: A afirmação (*) nos diz que

$[S]$ é o "menor" subespaço de V que contém S ,
no seguinte sentido:

Se W é um subespaço de V que contém S , então
 $S \subset [S] \subset W$.

$[S]$ está contido em TODOS os subespaços de V que contém S .

(3) Se $S_1, S_2 \subset V$ então $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$

4

Antes de provar essa afirmação, entenda bem o que é $W_1 + W_2$, quando W_1 e W_2 são subespaços de V .

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$$

ou seja, $v \in W_1 + W_2$ se, e somente se, existem $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$.

(a) Prove que $W_1 + W_2$ é um subespaço de V .

(b) Observe que $W_1 \subset W_1 + W_2$ e $W_2 \subset W_1 + W_2$.
($w_1 \in W_1 \Rightarrow w_1 = w_1 + 0$)

(Para provar (3), sejam $[S_1] = \overset{W_1}{\uparrow}$ e $[S_2] = \overset{W_2}{\uparrow}$

$$\begin{aligned} S_1 \subset W_1 \subset W_1 + W_2 &\Rightarrow S_1 \cup S_2 \subset W_1 + W_2 \\ S_2 \subset W_2 \subset W_1 + W_2 &\Rightarrow [S_1 \cup S_2] \subset W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Seja agora $v \in W_1 + W_2 \Rightarrow v = w_1 + w_2$ com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2 \Rightarrow w_1 \in [S_1]$ e $w_2 \in [S_2] \Rightarrow w_1 + w_2 \in [S_1 \cup S_2]$

ESPAÇOS VETORIAIS FINITAMENTE GERADOS

5

Seja V espaço vetorial $(V, +, \cdot)$.

DEF: V é FINITAMENTE GERADO se existe um conjunto finito $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $[S] = V$.

Exemplos

(1) $\mathbb{R}^2$ $S = \{(1,0), (0,1)\}$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset [S] \quad \text{e como, é claro, } [S] \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{temos que } [S] = \mathbb{R}^2.$$

(2) $\mathbb{R}^n$ $e_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \dots, 0)$

$$S = \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$[S] \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Mas se } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ então } (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

$$(3) M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M_2(\mathbb{R}) = [S] = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a E_{11} + b E_{12} + c E_{21} + d E_{22}$$

$$(4) M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \overset{\text{coluna } j}{1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \underset{\text{linha } i}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

E_{ij} é matriz que tem 1 na linha i coluna j
e 0 em todas as outras entradas

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \text{ já}$$

7

que toda matriz $A = (a_{ij})$

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

$$(4) P_n(\mathbb{R}) = [1, t, t^2, \dots, t^n] \text{ já que}$$

todo polinômio de grau $\leq n$ se

escreve como

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Achar conjuntos geradores para subespaços de um espaço vetorial

Exemplos:

$$(1) \quad W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$$

Pegue $(x, y, z) \in W$; então $z = -x - y$.

$$\text{Mas } (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

$$\text{Assim, } W = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$$

$$(2) \quad W = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t \}$$

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}. \text{ A condicional } A = A^t$$

implica que $b = c$.

$$\text{Então, } A \in W \iff A \text{ é da forma } \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, a, b, d \in \mathbb{R}$$

Logo

 $A \in W$ se escreve como

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Portanto } W = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$(3) W = \{ f(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \}$$

$$\text{Se } f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad \text{então}$$

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

$$\text{Mas } f(1) = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$$

$$\text{Assim, } f(t) \in W \iff f(t) = (-a_1 - a_2 - a_3)1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$= a_1(t-1) + a_2(t^2-1) + a_3(t^3-1). \quad \text{Logo } f(t) \in \text{CL}$$

$$\text{de } t-1, t^2-1, t^3-1 \quad \text{e} \quad W = [t-1, t^2-1, t^3-1],$$