MAE0326-Aplicações de Processos Estocásticos

Antes de discutir teoria de filas, alguns comentários sobre processos de Renovação que não serão cobrados nas provas.

Processos de Renovação:

É um processo de contagem que "generaliza" o processo de Poisson, permitindo que os intervalos entre eventos tenham distribuição qualquer.

Definição: Sejam $\{X_n\}, n \geq 1$ *v.a. não-negativas independentes e identicamente distribuidas. O processo de contagem correspondente*

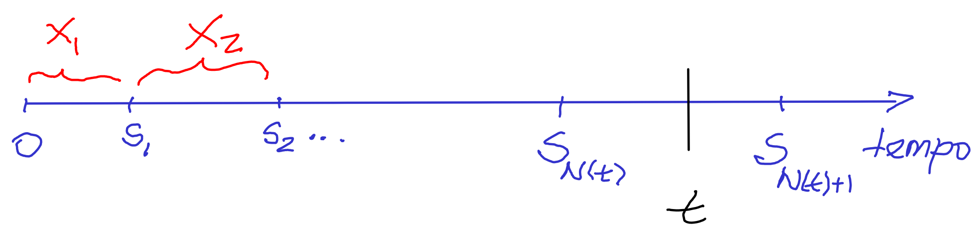
$$\{N_t\}_{t\geq 0} \quad (\text{ou } \{N(t)\}_{t\geq 0})$$

é chamado de processo de renovação.

Como o nome sugere, os instantes

$$S_0 \equiv 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

são "tempos de renovação" que estão sendo contados por $\{N(t)\}_{t\geq 0}$



$$N(t) = \max_n \{S_n \leq t\}$$ ***número de eventos até t.***

A distribuição dos intervalos entre eventos $\{X_n\}_{n\geq 1}$

é denotada por F, que agora não precisa mais ser exponencial. Duas condições naturais são que o suporte de F está em $\mathbb{R}_+$ ***, ou seja***

$P(X_n \geq 0) = 1$ ***e que*** $P(X_n > 0) > 0$ $\quad$ (ou $P(X_n = 0) < 1$)

E escrevemos $\mu = EX_n > 0$

Obs: Note que admitimos que o tempo entre duas renovações tenha prob. positiva de ser zero. Por exemplo, os tempos S_n ***podem ser os instantes de sucessivas trocas de lâmpadas, a antiga (que parou de funcionar) por uma "nova", que poderia já estar "quebrada"; estamos admitindo aqui que o tempo que gastamos para identificar o problema e trocar de lâmpada é muito pequeno e pode ser assumido "intantâneo".***

Note que

$S_{N(t)}$ ***é o instante da última renovação até o tempo t.***

Uma primeira observação simples é que o número de eventos cresce sem limite com t. Mais precisamente

alguma renovação "não ocorre" ou seja demorou um tempo infinito

$$P(\lim_{t\uparrow\infty} N(t) < \infty) = P\Big(\bigcup_{n\geq 1}\{X_n = \infty\}\Big)$$

σ-aditividade das probabilidades.

$$\leq \sum_{n\geq 1} \underbrace{P(X_n = \infty)}_{=0} = 0$$

Nos instantes de renovação acontecem "coisas importantes" para quem se interessou em modelar o sistema em questão, como "custo da troca da lâmpada", "mais um cliente pagante que entra no sistema", "sinistro que uma companhia de seguro tem que pagar", etc...

Queremos identificar a distribuição de $N(t),\ t\geq 0$

$P(N(t)=n) = ?$

Começamos observando a identidade dos eventos

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$$

n ou mais eventos até t

o "n-ésimo" evento aconteceu antes do (ou no) instante t

De onde segue

$$P(N_t = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n+1)$$

$$= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$$

$$\equiv F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

onde $F_n(t) \equiv P(S_n \leq t)$ é a distr. de prob. acomulada de S_n, $n \geq 1$

(n-ésima convolução de $F_1 \equiv F$)

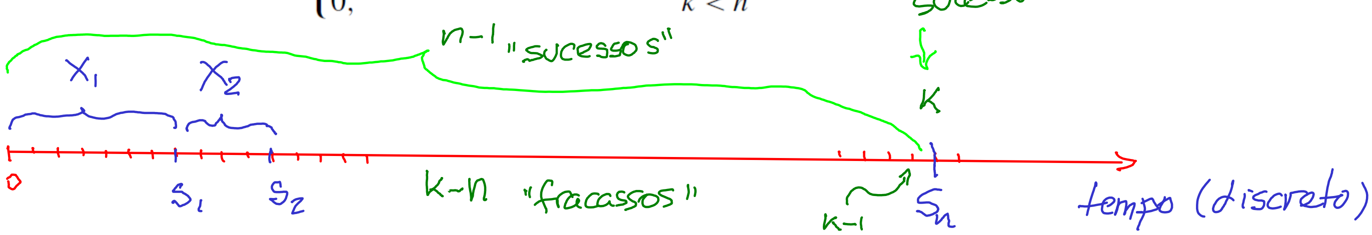
Exemplo com tempos entre renovações assumindo valores discretos.

$X_i \sim \text{geom}(p)$

Example 7.1 Suppose that $P\{X_n = i\} = p(1-p)^{i-1}$, $i \geqslant 1$. That is, suppose that the interarrival distribution is geometric. Now $S_1 = X_1$ may be interpreted as the number of trials necessary to get a single success when each trial is independent and has a probability p of being a success. Similarly, S_n may be interpreted as the number of trials necessary to attain n successes, and hence has the negative binomial distribution

"Versão discreta do Processo de Poisson"

$$P\{S_n = k\} = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, & k \geqslant n \\ 0, & k < n \end{cases}$$



$$P\{N(t)=n\} = \sum_{k=n}^{[t]} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{[t]} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1}$$

Equivalently, since an event independently occurs with probability p at each of the times $1, 2, \ldots$

$$P\{N(t)=n\} = \binom{[t]}{n} p^n (1-p)^{[t]-n} \quad \blacksquare$$

obs: se $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ = "parte inteira de x"

Uma quantidade que vai ser particularmente importante em processos de renomação é a "Função de Renovação"

$$m(t) \equiv E(N(t))$$

$$\begin{aligned} m(t) &= E[N(t)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\} \qquad \text{(Porquê?)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leqslant t\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \end{aligned}$$

Obs: $F_n = \underbrace{F * F * \ldots * F}_{\text{n convoluções de } F}$

Exemplo:

$F_2(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F(t-x)\, dF(x)}_{\text{convolução de } F \text{ com } F}$

Exercício: Com $F \sim exp(\lambda)$ determine F_n

A função de renovação tem "muita" informação sobre o processo.
Exemplo:

Example 7.2 Suppose we have a renewal process whose mean-value function is given by

$$m(t) = 2t, \qquad t \geqslant 0$$

What is the distribution of the number of renewals occurring by time 10?

Solution: Since $m(t) = 2t$ is the mean-value function of a Poisson process with rate 2, it follows, by the one-to-one correspondence of interarrival distributions F and mean-value functions $m(t)$, that F must be exponential with mean $\frac{1}{2}$. Thus, the renewal process is a Poisson process with rate 2 and hence

$$P\{N(10)=n\} = e^{-20}\frac{(20)^n}{n!}, \qquad n \geqslant 0 \quad \blacksquare$$

Um exercício (não trivial) é mostrar que

$$m(t) < \infty \ ! \quad \forall\ t \geq 0$$

Obs: esse resultado não segue imediatamente de N(t) ser finito.

(ii) Some readers might think that the finiteness of $m(t)$ should follow directly from the fact that, with probability 1, $N(t)$ is finite. However, such reasoning is not valid; consider the following: Let Y be a random variable having the following probability distribution

$$Y = 2^n \text{ with probability } \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n \geqslant 1$$

Tem a ver com o paradoxo de St. Petersburg.

"dobre a aposta toda vez que perder num jogo honesto"

Now,

$$P\{Y < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1$$

But

$$E[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n P\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \infty$$

Hence, even when Y is finite, it can still be true that $E[Y] = \infty$.

Vou fazer algumas observações matemáticas sobre m(t) e outros resultados de processos de renovação. Com escrevi acima, não será cobrado nas provas.

Em particular, queria ilustrar o que está por trás do "paradoxo da inspeção" (lei de Murphy), que pedi para vocês verificarem por simulação: "para todo t > 0, o intervalo entre os dois eventos, aquele que aconteceu até t e o que aconteceu depois, é tipicamente maior que os demais".

Por exemplo, pense que os eventos são "passar um ônibus circular da USP" ali no seu ponto ao lado do IME, que te levaria ao delicioso almoço do bandejão (naqueles saudosos tempos presenciais) e t é o instante que você chega ao ponto.

Começamos condicionando no instante da primeira renovação

$$m(t) = E[N(t)] = \int_0^{\infty} E[N(t)|X_1 = x] f(x)\, dx \qquad (7.4)$$

Claramente $E(N(t)|X_1=x) = 0$ se $x \geq t$

e

$$E[N(t)|X_1 = x] = 1 + E[N(t-x)] \quad \text{if } x < t$$

Então encontamos a "equação de renovação"

$$m(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)]f(x)\,dx$$

$$= F(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)\,dx \qquad (7.5)$$

$F(x) = F_1(x) = P(X_1 \leq x)$

Exemplo: sumponha que $X_n \sim U(0,1)$ *(tempo entre sucessivas renovações tem distribuição U(0,1))*

então, se t ≤ 1

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)\,dx$$

$$= t + \int_0^t m(y)\,dy \qquad \text{by the substitution } y = t - x$$

e $\frac{d}{dt}m(t) = 1 + m(t) \overset{\text{(porquê?)}}{\Longrightarrow} m(t) = e^t - 1$, para $t \in (0,1)$

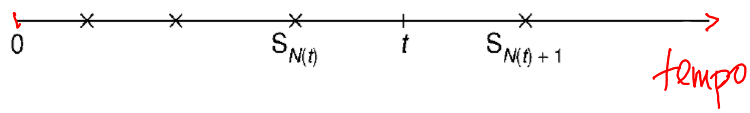
(e para $t \geq 1$?)

Como N(t) cresce quando t vai para infinito?

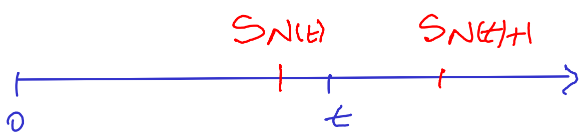
Dois teoremas limites.

Proposition 7.1 With probability 1,

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \qquad \text{as } t \to \infty$$



Demonstração: Segue basicamente da Lei dos Grandes Números. (LGN)



$$S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1} \qquad e \qquad S_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} & \le & \dfrac{t}{N(t)} & \le & \dfrac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} & & \dfrac{N(t)+t}{t} \\
(LGN) \downarrow t \to \infty & & & & (LGN) \downarrow & & \downarrow \\
\mu & & & & \mu & & 1
\end{array}$$

$\square$

Elementary Renewal Theorem (teorema de renovação)

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \qquad \text{as } t \to \infty$$

As before, $1/\mu$ is interpreted as 0 when $\mu = \infty$.

que parece ser uma consequência imediata do resultado anterior, mas não é. O exemplo seguinte deixa isso claro.

Example 7.4 Let U be a random variable which is uniformly distributed on (0, 1); and define the random variables Y_n, $n \geqslant 1$, by

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{if } U > 1/n \\ n, & \text{if } U \leqslant 1/n \end{cases}$$

Now, since, with probability 1, U will be greater than 0, it follows that Y_n will equal 0 for all sufficiently large n. That is, Y_n will equal 0 for all n large enough so that $1/n < U$. Hence, with probability 1,

$$Y_n \to 0 \qquad \text{as } n \to \infty$$

However,

$$E[Y_n] = n P\left\{U \leqslant \frac{1}{n}\right\} = n\frac{1}{n} = 1$$

Therefore, even though the sequence of random variables Y_n converges to 0, the expected values of the Y_n are all identically 1. ■

ou seja, a variável aleatória convergir para uma constante (mesmo com probabilidade 1!) não implica que seu valor esperado converge. Não posso trocar limites com valor esperado

$$E\left[\lim_{t\uparrow\infty} \frac{N(t)}{t}\right] \neq \lim_{t\uparrow\infty} \frac{E[N(t)]}{t}$$

não é sempre verdade.

Dois exemplos de aplicação desses resultados de processos de renovação.

Example 7.5 Beverly has a radio that works on a single battery. As soon as the battery in use fails, Beverly immediately replaces it with a new battery. If the lifetime of a battery (in hours) is distributed uniformly over the interval (30, 60), then at what rate does Beverly have to change batteries?

Solution: If we let $N(t)$ denote the number of batteries that have failed by time t, we have by Proposition 7.1 that the rate at which Beverly replaces batteries is given by

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{45}$$

That is, in the long run, Beverly will have to replace one battery every 45 hours. ■

Example 7.6 Suppose in Example 7.5 that Beverly does not keep any surplus batteries on hand, and so each time a failure occurs she must go and buy a new battery. If the amount of time it takes for her to get a new battery is uniformly distributed over (0,1), then what is the average rate that Beverly changes batteries?

Solution: In this case the mean time between renewals is given by

$$\mu = EU_1 + EU_2$$

where U_1 is uniform over (30, 60) and U_2 is uniform over (0, 1). Hence,

$$\mu = 45 + \tfrac{1}{2} = 45\tfrac{1}{2}$$

and so in the long run, Beverly will be putting in a new battery at the rate of $\frac{2}{91}$. That is, she will put in two new batteries every 91 hours. ■

A demonstração do "teorema de renovação elementar" não é simples. Existem algumas questões matemáticas importantes, que vocês já observaram nas simulações do "paradoxo da inspeção".

Sem entrar em detalhes, a idéia importante envolve a noção de "tempo de parada" (stopping time). Imagine um jogo, apostar na roleta ou algo assim, no qual ao final da rodada n você "ganha" X_n .

Imagine que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *seja a sequência que indica os sucessivos resultados e você pode decidir, ao final de cada jogada, digamos a jogada n, se para de jogar ou se continua por mais uma rodada. A menos que exista alguma trapaça, sua "regra de decisão" (paro na jogada n ou continuo para a jogada n+1?) só pode envolver os resultados observados até esta jogada n. Você não pode "ver o futuro".*

Definição: Uma v.a. N que só pode assumir valores inteiros não-negativos é dita um Tempo de Parada com respeito a uma sequência $\{X_n\}_{n\geq 1}$
se

$E[N] < \infty$ e o evento $\{N = n\}$ = "paro na jogada n"

só depende de $X_1, X_2, \ldots, X_n$

obs: Colocando de outra forma, exigimos que o evento $\{N=n\}$ *seja independente dos resultados* $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$

Exemplo: suponha que você vai sorteando cartas de um baralho e N="primeiro sorteio no qual encontro uma carta de copas". N é um tempo de parada.

Suponha agora a variável aleatória M="sorteio imediatamente anterior àquele no qual aparece uma carta de copas pela primeira vez".

Ou seja, M=N-1. M é um tempo de parada? (Não!)

Exercício: verifique que, para processos de renovação, N(t) não é um tempo de parada.

Ou seja, para decidir se { N(t) = n } ("aconteceram n eventos até t e o evento n+1 aconteceu depois de t") não basta conecer $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Exercício: verifique que, para processos de renovação, N(t) + 1 é um tempo de parada.

A importância dessa noção de tempo de parada vem de um teorema, conhecido como "equação de Wald".

Equação de Wald: Se $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ***é uma coleção i.i.d. de v.a. com*** $E|X_i|<\infty$

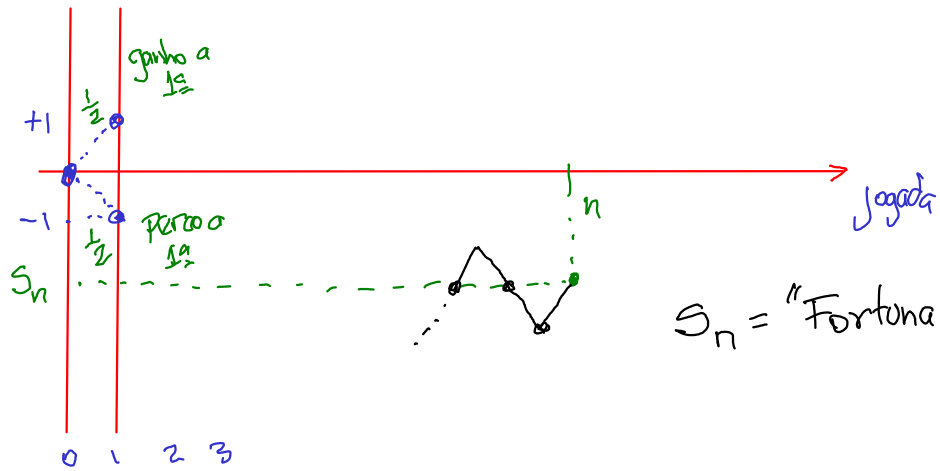
e N é um tempo de parada associado a esta sequência, então

$$E[\underbrace{\sum_{i=1}^{N} X_i}_{\text{" soma de uma quantidade aleatória de variáveis aleatórias"}}] = E[N].E[X_i]$$

Obs. Imagine o seguinte jogo: lanço uma moeda honesta repetidas vezes e os sucessivos são denotados por $X_1, X_2, \ldots$, $X_i \sim$ Bernoulli(1/2), indep.

A cada jogada n, se sair cara você ganha 1 real, caso contrário perde um real. Quanto você tem ao final da jogada n?

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{2X_i - 1}_{\text{quanto você ganha (+1 ou -1) na jogada } i.})$$



S_n = "Fortuna na jogada n"

Se você para de jogar no rodada n, você "ganha" S_n, que pode ser positivo ou negativo.

Seja N = "primeiro instante no qual $S_n = 1$ "

= "primeiro instante no qual estou ganhando"

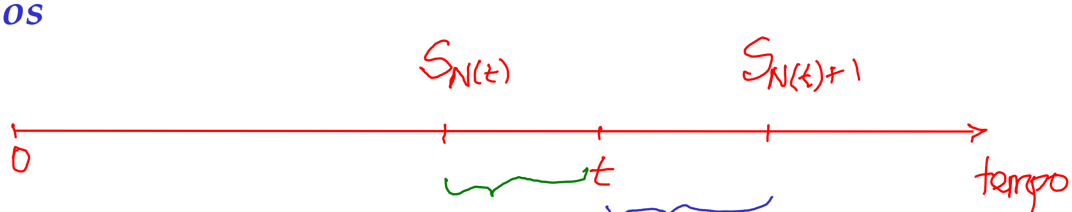
N é um tempo de parada?

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} (2X_i - 1) = 1 \quad !$$

Portanto esta estratégia de jogo parece infalível: sempre saio do jogo ganhando! Concorda?

Verifique que a equação de Wald não vale.

Voltando ao processo de renovação. Como N(t) + 1 é um tempo de parada, temos



"age at t" = $A(t)$

"tempo desde a última renovação no inst. t"

$Y(t)$ = "excess time"

"tempo até a próxima renovação no instante t"

$$S_{N(t)+1} = t + y(t)$$

$$E\left[S_{N(t)+1}\right] = \mu\left(m(t)+1\right)$$
$$= t + E\left[y(t)\right]$$

Portanto $$\frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} + \frac{E\left[y(t)\right]}{t\mu}$$

e a demonstração do teorema elementar de renovação necessita mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[y(t)\right]}{t} = 0$$

No caso do processo de Poisson temos $y(t)$ e $A(t)$ são independentes!

$y(t) \sim exp(\lambda)$ a mesma distribuição que X_i $\left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right)$

e $A(t)$? também tem distr. exponencial ?

Note que

$$E\left[S_{N(t)}\right] \neq m(t).\mu = m(t).\frac{1}{\lambda}$$

e $$E\left[\underbrace{S_{N(t)+1} - S_{N(t)}}_{X_{N(t)+1}}\right] > \frac{1}{\lambda}$$