



# Mecânica I – PME3100

## Aulas 12, 13 e 14

### Capítulo 6 – Cinemática dos Sólidos

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido**

6.4.1 Mov. de translação

6.4.2 Mov. de rotação

**6.5 Movimento geral de um sólido**

6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental

6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.

6.5.3 Movimento plano

**6.3 – Cinemática do sólido – propriedade fundamental**

$P_1$  e  $P_2$  = dois pontos quaisquer de um sólido  $S$  em movimento

$$|P_1 - P_2|^2 = cte \quad \text{ou} \quad (P_1 - P_2) \cdot (P_1 - P_2) = cte$$

Derivando em relação ao tempo

$$(P_1 - P_2) \cdot (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) = 0$$

Propriedade Fundamental

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido**

6.4.1 Mov. de translação

6.4.2 Mov. de rotação

**6.5 Movimento geral de um sólido**

6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental

6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.

6.5.3 Movimento plano

*Os movimentos de um sólido  $S$  são caracterizados pelo fato de, em cada instante, as velocidades de quaisquer de seus pontos apresentarem mesma componente segundo a reta que liga esses pontos*

$$(P_1 - P_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$$

Propriedade Fundamental

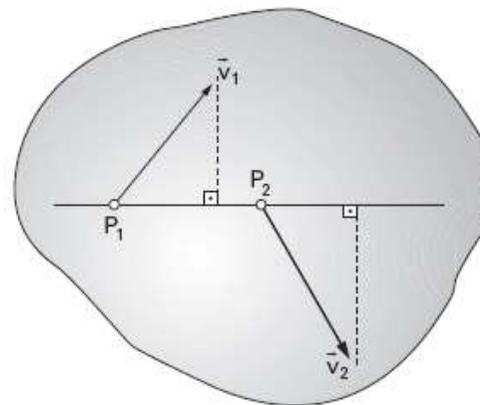


Figura 6.7 – Propriedade fundamental das velocidades de dois pontos de um sólido

$$\vec{v}_1 \cdot (P_1 - P_2) = \vec{v}_2 \cdot (P_1 - P_2)$$

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação**

6.4.2 Mov. de rotação

**6.5 Movimento geral de um sólido**

6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental

6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo

6.5.3 Movimento plano

## 6.4 – Movimentos particulares de um sólido

### 6.4.1 – Movimento de translação

$$P_1 - P_2 = \bar{c}$$

$\bar{c}$  = vetor cte. no tempo

Derivando em relação ao tempo

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v} \Rightarrow \text{velocidade de translação}$$

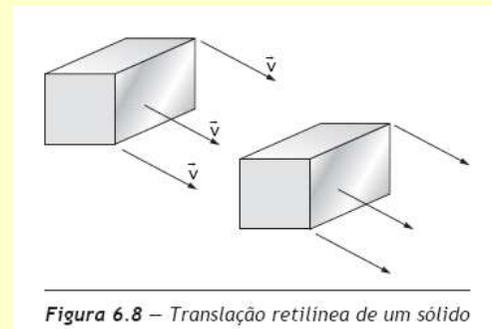


Figura 6.8 – Translação retilínea de um sólido

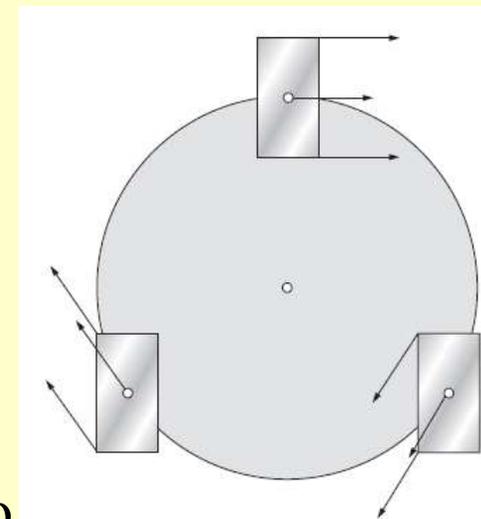


Figura 6.9 – Translação (não retilínea) de S

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.****6.5.3 Movimento plano****6.4.2 – Movimento de rotação**

Dois de seus pontos permanecerem fixos durante o movimento (consequentemente todos os pontos da reta que os une, chamado **eixo de rotação**)

$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta} \Rightarrow$  velocidade angular do movimento de rotação

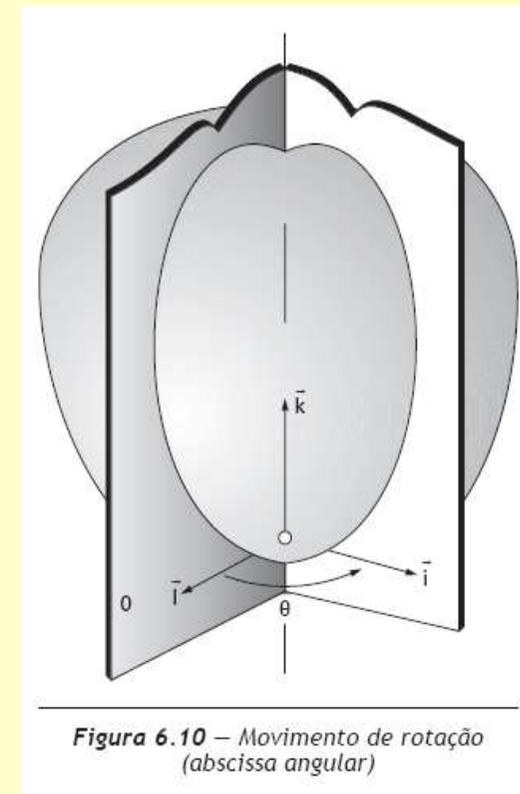


Figura 6.10 – Movimento de rotação  
(abscissa angular)

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

velocidade  $\mathbf{v}_P$  de um ponto  $P$  qualquer

$$\bar{\mathbf{v}}_P = r\dot{\theta}\bar{\boldsymbol{\tau}} \Rightarrow (\text{slide 10} - \text{aula 11})$$

Pode-se escrever  $\bar{\mathbf{k}} \wedge (P - Q) = r\bar{\boldsymbol{\tau}}$

⇓

$$\bar{\mathbf{v}}_P = \dot{\theta}\bar{\mathbf{k}} \wedge (P - Q) \Rightarrow \bar{\mathbf{v}}_P = \dot{\theta}\bar{\mathbf{k}} \wedge [(P - O) - (Q - O)]$$

$$\bar{\mathbf{v}}_P = \dot{\theta}\bar{\mathbf{k}} \wedge (P - O)$$

$O$  é um ponto qualquer do eixo de rotação



**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.****6.5.3 Movimento plano**

$$\vec{v}_P = \dot{\theta} \vec{k} \wedge (P - O)$$

$\dot{\theta} \vec{k} = \vec{\omega} \Rightarrow$  **Vetor rotação** do movimento de rotação



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

O vetor rotação é perpendicular ao plano de rotação ( $\vec{k}$ )

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.****6.5.3 Movimento plano****6.5 – Movimento geral de um sólido**

**Teorema 1:** quaisquer que sejam  $O$  e  $P$  de um sólido em movimento, existe  $\omega = \omega(t)$ , tal que a relação entre as velocidades é:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

**Fórmula Fundamental da Cinemática dos Sólidos**

*Fórmula de Poisson*

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.****6.5.3 Movimento plano**

**Teorema 2:** é única a função  $\omega = \omega(t)$

O vetor  $\bar{\omega}$ , apesar de ter sido definido através da escolha de uma base móvel, independe dela.



**Capítulo 6**

**6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental**

**6.4 Movimentos particulares de um sólido**

**6.4.1 Mov. de translação**

**6.4.2 Mov. de rotação**

**6.5 Movimento geral de um sólido**

**6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental**

**6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo.**

**6.5.3 Movimento plano**

## 6.5.1 – Consequências da fórmula fundamental

1) ...

2) ...

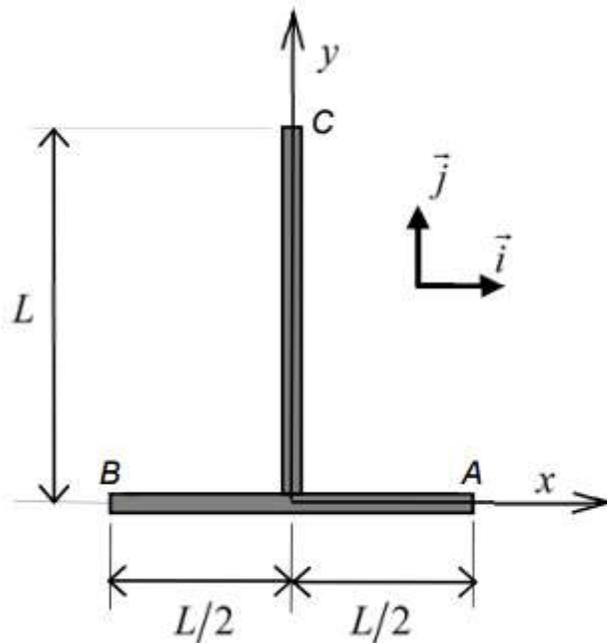
(pág. 100 livro França)

3) ...

4) ...

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

P2 – 2014:



**QUESTÃO 1 (3,0 pontos).** A peça  $ABC$  mostrada na figura é formada por dois segmentos ortogonais de comprimento  $L$ . Em um dado instante, sabe-se que as velocidades dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são:

$$\vec{V}_A = \frac{\omega L}{2} \vec{j}, \quad \vec{V}_B = -\frac{\omega L}{2} \vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{V}_C = -\omega L \vec{i} + \omega L \vec{k}$$

Para este instante:

- mostrar que as velocidades dos pontos  $A$  e  $C$  são compatíveis com a condição de corpo rígido;
- calcular o vetor rotação da peça  $ABC$  neste instante.

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano****6.5.2 – Eixo helicoidal instantâneo (EHI)**

Lugar geométrico dos pontos de  $S$  que tem velocidade paralela a  $\vec{\omega} \neq 0$ .

Os pontos do EHI, são, em cada instante, aqueles pontos de  $S$  para as quais a **velocidade é mínima, em módulo.**

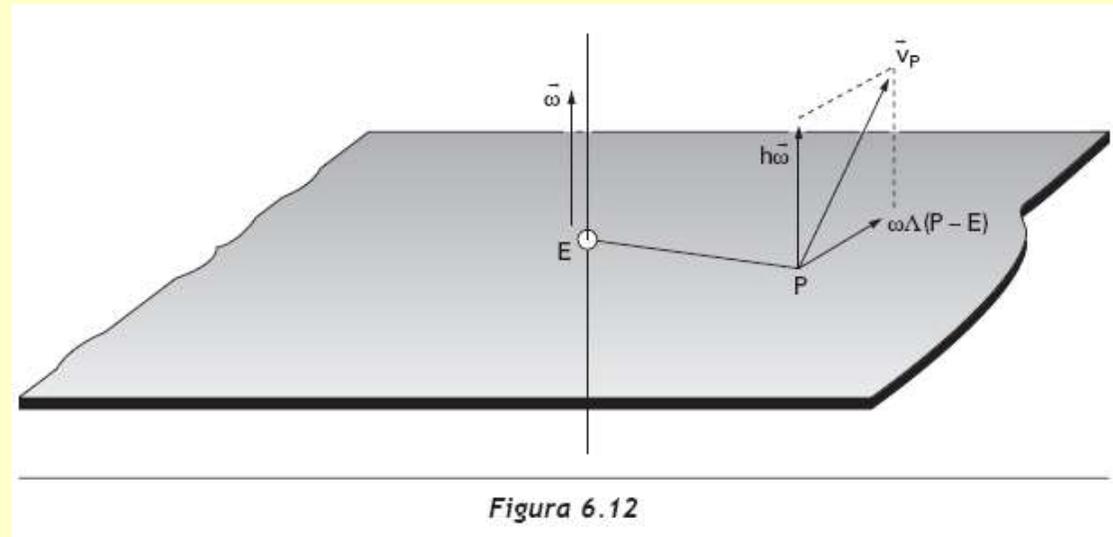


Figura 6.12

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

Pausa para meditação: quando estudamos eixo central

$$\text{Equação: } \bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b}$$

$$\text{Solução: } \bar{x} = \frac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} + \lambda \bar{a}$$

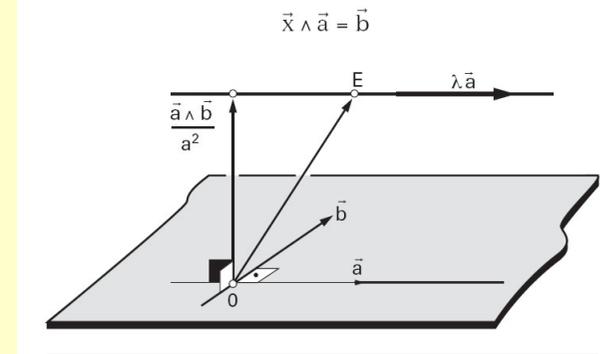


Figura 2.8 – Equação da reta

$$E = O + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_O}{|\bar{R}|^2} + \lambda \bar{R}$$

$$\bar{M}_{mín} = \frac{I}{|\bar{R}|^2} \bar{R}$$

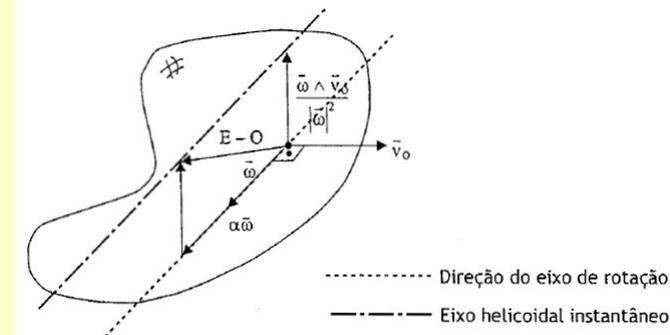
Fim da pausa!

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_P = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_P = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_O$$



Fonte: KAMINSKI, P. C. *Mecânica Geral para Engenheiros*. 1ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2000.

Projeção da velocidade de  $P$  (qualquer ponto do sólido) na direção de  $\vec{\omega}$  é constante.

Existe uma coleção de pontos que formam uma reta paralela ao vetor  $\vec{\omega}$  que terão velocidade mínima (em módulo)



**Capítulo 6**

**6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental**

**6.4 Movimentos particulares de um sólido**

**6.4.1 Mov. de translação**

**6.4.2 Mov. de rotação**

**6.5 Movimento geral de um sólido**

**6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental**

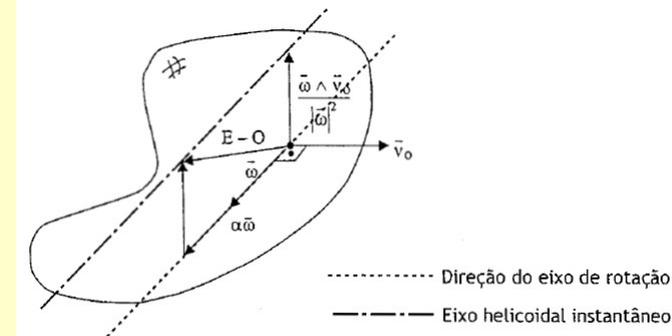
**6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo**

**6.5.3 Movimento plano**

Seja  $E$  um ponto deste eixo

$$\vec{v}_E = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O) = \lambda \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_O - \vec{v}_E = (E - O) \wedge \vec{\omega}$$



Fonte: KAMINSKI, P. C. *Mecânica Geral para Engenheiros*. 1ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2000.

$$\vec{v}_O - \vec{v}_E = \vec{b} \quad (E - O) = \vec{x} \quad \vec{a} = \vec{\omega}$$



$$E = O + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda \vec{\omega}$$

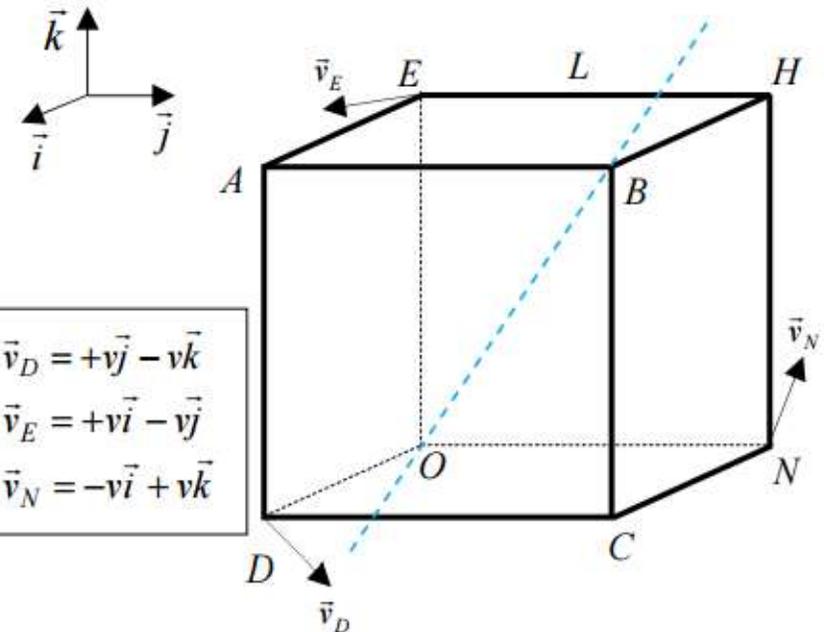
$$\vec{v}_E = \vec{v}_{min} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} \cdot \vec{\omega}$$

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano****P2 – 2012:**

**QUESTÃO 1 (3,5 pontos)** – No instante mostrado na figura, a posição do cubo de aresta  $L$  é tal que  $\overline{OD}$  é paralelo a  $\vec{i}$ ,  $\overline{ON}$  é paralelo a  $\vec{j}$  e  $\overline{OE}$  é paralelo a  $\vec{k}$ . Nesse mesmo instante são conhecidas as velocidades dos vértices  $D$ ,  $E$  e  $N$  (ver quadro ao lado da figura). Os versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  são fixos.

Para o instante mostrado na figura:

- Usando somente a propriedade fundamental da cinemática do corpo rígido, determine a velocidade  $\vec{v}_O$  do ponto  $O$ .
- Determine o vetor de rotação  $\vec{\omega}$  do cubo.
- Localize graficamente o eixo helicoidal instantâneo e diga qual é o ato de movimento do cubo.



**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano****6.5.3 – Movimento plano****velocidade e aceleração num movimento plano**

sejam  $O$  e  $P$  dois pontos da figura  $F$ , móvel no seu plano  $\pi$ , Sendo  $r$  a distância dos dois pontos e  $\mathbf{u}$  o versor de direção  $OP$ .

$$P = O + r\mathbf{u}$$

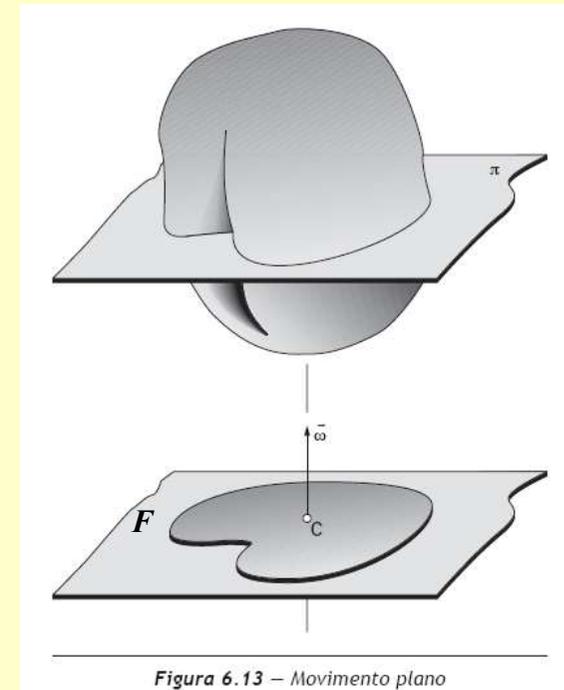


Figura 6.13 – Movimento plano

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

$$P = O + r\bar{u}$$

Derivando em relação a  $t$ 

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \overset{0}{\dot{r}\bar{u}} + r\dot{\bar{u}} \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_P = \bar{v}_O + \omega r\bar{t}$$

Derivando novamente em relação a  $t$ 

$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + r\dot{\omega}\bar{t} + r\omega\dot{\bar{t}} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_P = \bar{a}_O + r\dot{\omega}\bar{t} - r\omega^2\bar{u}$$

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

## Mais um comentário

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (P - O)$$

Derivando em relação a  $t$ 

$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \wedge (P - O) + \bar{\omega} \wedge (\bar{v}_P - \bar{v}_O)$$



$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \wedge (P - O) + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P - O)]$$

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

Em resumo

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (P - O)$$

ou

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \omega r \bar{t}$$



$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \wedge (P - O) + \bar{\omega} \wedge (\bar{v}_P - \bar{v}_O)$$

ou

$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + r \dot{\omega} \bar{t} + r \omega \dot{\bar{t}}$$



$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + \dot{\bar{\omega}} \wedge (P - O) + \bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P - O)]$$

ou

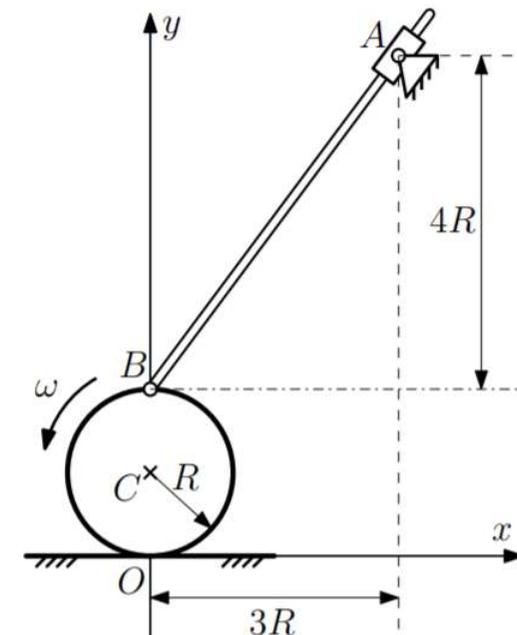
$$\bar{a}_P = \bar{a}_O + r \dot{\omega} \bar{t} - r \omega^2 \bar{u}$$

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

## P2 – 2019 - Reoferecimento:

**Questão 2 (3,5 pontos).** O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco de centro  $C$  e raio  $R$  e por uma barra rígida que tem uma de suas extremidades articulada ao ponto  $B$  na periferia do disco e que pode deslizar no interior da luva articulada em  $A$ . Assuma que o disco rola sem escorregar sobre a superfície plana fixa ilustrada com um vetor de rotação  $\omega \vec{k}$  constante. Utilizando o sistema de coordenadas  $Oxyz$  fornecido (versores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ), pedem-se, em função dos parâmetros  $R$  e  $\omega$ :

- a) a velocidade  $\vec{v}_C$  e a aceleração  $\vec{a}_C$  do ponto  $C$ ;
- b) a velocidade  $\vec{v}_B$  e a aceleração  $\vec{a}_B$  do ponto  $B$ ;
- c) as coordenadas  $x$  e  $y$  do centro instantâneo de rotação da barra;
- d) o vetor de rotação  $\vec{\Omega}$  da barra;





**Capítulo 6**

**6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental**

**6.4 Movimentos particulares de um sólido**

**6.4.1 Mov. de translação**

**6.4.2 Mov. de rotação**

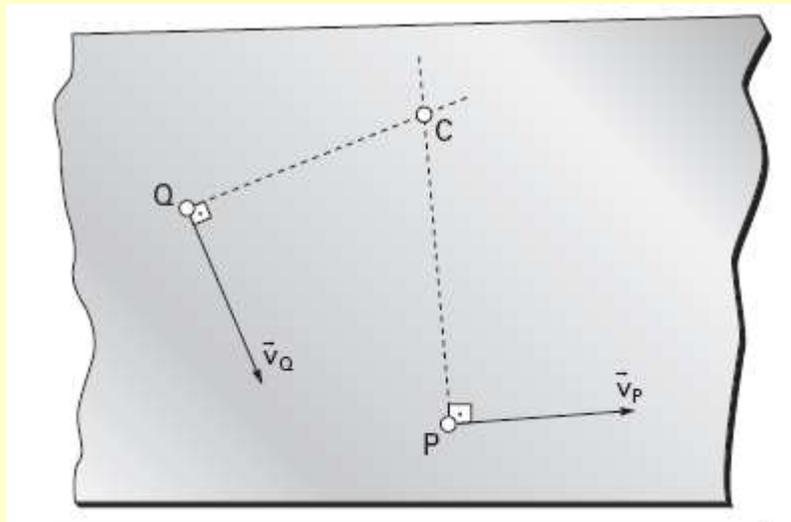
**6.5 Movimento geral de um sólido**

**6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental**

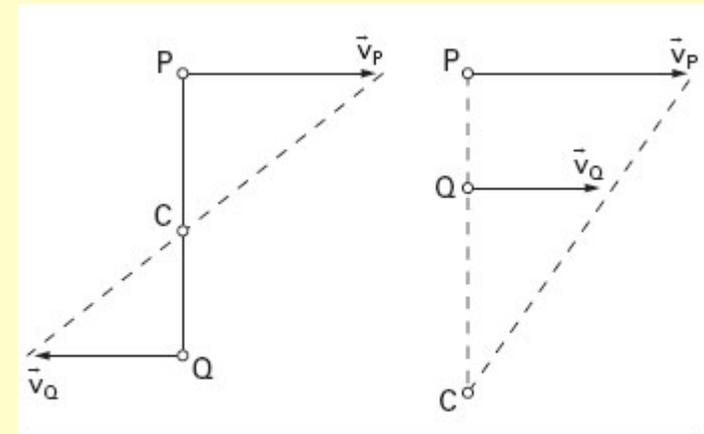
**6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo**

**6.5.3 Movimento plano**

## Determinação geométrica do centro instantâneo de rotação



**Figura 6.16** – Determinação de C, a partir de velocidades não paralelas



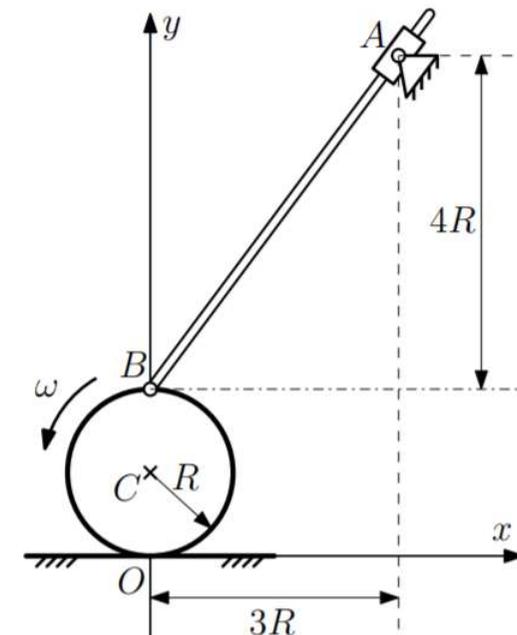
**Figura 6.17** – Determinação de C, a partir de velocidades paralelas

**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

## P2 – 2019 – Reoferecimento - terminando:

**Questão 2 (3,5 pontos).** O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco de centro  $C$  e raio  $R$  e por uma barra rígida que tem uma de suas extremidades articulada ao ponto  $B$  na periferia do disco e que pode deslizar no interior da luva articulada em  $A$ . Assuma que o disco *rola sem escorregar* sobre a superfície plana fixa ilustrada com um vetor de rotação  $\omega \vec{k}$  constante. Utilizando o sistema de coordenadas  $Oxyz$  fornecido (versores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ), pedem-se, em função dos parâmetros  $R$  e  $\omega$ :

- a) a velocidade  $\vec{v}_C$  e a aceleração  $\vec{a}_C$  do ponto  $C$ ;
- b) a velocidade  $\vec{v}_B$  e a aceleração  $\vec{a}_B$  do ponto  $B$ ;
- c) as coordenadas  $x$  e  $y$  do centro instantâneo de rotação da barra;
- d) o vetor de rotação  $\vec{\Omega}$  da barra;



**Capítulo 6**6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental

6.4 Movimentos particulares de um sólido

6.4.1 Mov. de translação

6.4.2 Mov. de rotação

6.5 Movimento geral de um sólido

6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental

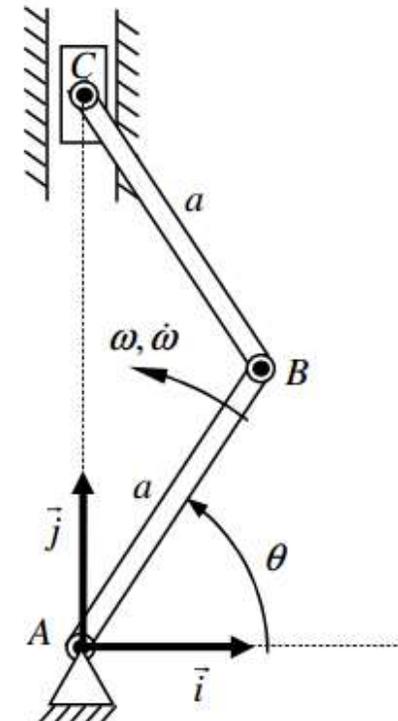
6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo

6.5.3 Movimento plano

P2 – 2013:

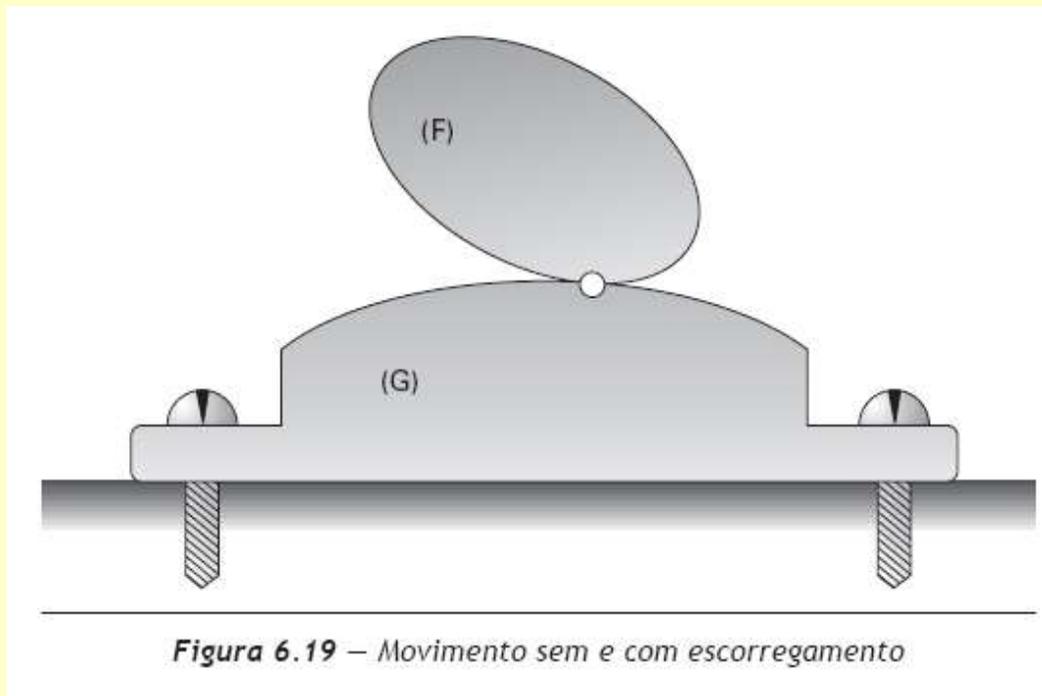
**QUESTÃO 2 (3,5 pontos).** O mecanismo da figura ao lado é composto pelas barras  $AB$  e  $BC$ , de mesmo comprimento  $a$ , articuladas entre si por meio de um pino  $B$ . A extremidade  $A$  da barra  $AB$  é vinculada a uma articulação fixa e a extremidade  $C$  da barra  $BC$  é ligada a um bloco que se move ao longo de uma guia vertical. Sabendo que a barra  $AB$  gira com velocidade angular  $\omega$  e aceleração angular  $\dot{\omega}$ , determine:

- o centro instantâneo de rotação da barra  $BC$ ;
- a velocidade  $\vec{v}_B$  e a aceleração  $\vec{a}_B$  do ponto  $B$ ;
- a velocidade angular  $\omega_{BC}$  da barra  $BC$  e a velocidade do ponto  $C$ ;
- a aceleração angular  $\dot{\omega}_{BC}$  da barra  $BC$  e a aceleração do ponto  $C$ .



**Capítulo 6****6.3 Cinemática do sólido:  
propriedade fundamental****6.4 Movimentos particulares de um sólido****6.4.1 Mov. de translação****6.4.2 Mov. de rotação****6.5 Movimento geral de um sólido****6.5.1 Conseq. da fórmula fundamental****6.5.2 Eixo helicoidal instantâneo****6.5.3 Movimento plano**

## Movimento com e sem escorregamento



*Sem escorregamento:*  
Igualdade entre os  
vetores velocidade no  
ponto de contato.

*Com escorregamento:*  
Não há igualdade  
entre estes vetores  
(velocidade).



## PERGUNTAS?

