MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

3.2. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura fixa T_1 e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

3.2. Observamos que $v(x,t) = T_1$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

que satisfaz as condições

$$u(0,t) = T_1, \; \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Logo a solução do problema é

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

em que $u_0(x,t)$ é a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$u(x,t) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} e^{-\frac{\alpha^2 (2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t}$$

é a solução do problema da valor inicial e de fronteiras se

$$u(x,0) = f(x) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

ou seja, os coeficientes são dados por

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_1] \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \, dx.$$

Conside agora o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = q \end{cases}$$

De forma semelhante, analisa-se a solução de regime estacionário:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = C_1 \Rightarrow v(x) = C_1 x + C_2$$

$$v'(x) = C_1$$

Aplicando as condições de contorno:

$$v(0) = C_2 = T_1$$

$$v'(L) = C_1 = q$$

$$\Rightarrow$$

A solução é a composição da solução estacionária e a solução transiente do problema com condições homogêneas

$$v(x) = qx + T_1$$

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t),$$

✓

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

✓

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

✓

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas ✓

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

3.3.2 Equação do Calor não Homogênea

Considere o seguinte PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2 \end{cases}$$

Vamos mostrar que a solução deste problema é dada por

$$u(x,t) = v(x) + u_0(x,t),$$

em que $v(x)$ é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} \alpha^2 v'' = -g(x) \\ v(0) = T_1,\ v(L) = T_2 \end{cases}$$

e $u_0(x,t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) - v(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Calculando as derivadas temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} g(x)$$

Substituindo-se na equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x)$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + g(x) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = g(x)$$

$$u(x,0) = v(x) + u_0(x,0) = v(x) + f(x) - v(x) = f(x),$$

$$u(0,t) = v(0) + u_0(0,t) = v(0) = T_1,$$

$$u(L,t) = v(L) + u_0(L,t) = v(L) = T_2.$$

Como mostramos quando estudamos o problema homogêneo com condições de fronteira homogêneas

$$\lim_{t\to\infty} u_0(x,t) = 0.$$

Logo

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) + \lim_{t\to\infty} u_0(x,t) = v(x), \quad \text{para } x \in [0,L]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito, a solução $u(x,t)$ tende a $v(x)$, chamada **solução estacionária** ou **solução de equilíbrio**.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \\ u(x,0) = T_0, \qquad 0 < x < L \\ u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = T_L \end{cases}$$

,onde G é um valor constante

Encontrando a solução estacionária: $v'' = -G$

$$v(0) = 0, \qquad v(L) = T_L$$

$$v'' = -G, \qquad v' = -Gx + C_1, \quad v = -G\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = C_2 = 0$$

$$v(L) = -G\frac{L^2}{2} + C_1 L = T_L \qquad C_1 = \frac{T_L}{L} + G\frac{L}{2}$$

$$v(x) = -G\frac{x^2}{2} + \left(\frac{T_L}{L} + G\frac{L}{2}\right)x \qquad v(x) = G\left(\frac{Lx - x^2}{2}\right) + \frac{T_L x}{L}$$

3.3. Resolva o PVIF e determine a solução estacionária.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{3}{40} \\ u(x,0) = 20,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 60 \end{cases}$$

3.3. A solução de

$$\begin{cases} v'' = \frac{3}{40} \\ v(0) = 0,\ v(40) = 60 \end{cases}$$

é $v(x) = \dfrac{3}{80}x^2$. A solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 20 - \dfrac{3}{80}x^2,\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$g(x) = 20 - \frac{3}{80}x^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{20}\int_0^{40} g(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{40})dx \\
&= 2\left(20 b_n(f_{0,1}^{(0)}, 40) - \frac{3}{80} b_n(f_{0,1}^{(2)}, 40)\right) \\
&= -\frac{40}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi} - \frac{120}{n^3\pi^3}\left(2s \operatorname{sen} s + \left(2 - s^2\right)\cos s\right)\Big|_0^{n\pi} \\
&= -\frac{40}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) - \frac{120}{n^3\pi^3}\left((2 - n^2\pi^2)\cos(n\pi) - 2\right) \\
&= \frac{40\left(2\pi^2 n^2(-1)^n - 6(-1)^n + \pi^2 n^2 + 6\right)}{\pi^3 n^3},\ n = 1, 2, 3 \ldots
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{3}{80}x^2 + \frac{40}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi^2 n^2(-1)^n - 6(-1)^n + \pi^2 n^2 + 6}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = \frac{3}{80}x^2.$$

Exemplo 3.5. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, com coeficiente $\alpha = 1$, com as extremidades mantidas a temperaturas de 10° C e 30° C e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = 10 + \text{sen}\,\frac{\pi x}{80},$$

Vamos resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\pi^2}{640}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi x}{80} \\ u(x,0) = f(x) = 10 + 10\,\text{sen}\,\dfrac{\pi x}{80}, \quad 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 10, \;\; u(40,t) = 30 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = v(x) + u_0(x,t),$$

em que $v(x)$ é a solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} v'' = -\dfrac{\pi^2}{640} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{80} \\ v(0) = 10, \ v(40) = 30 \end{cases}$$

e $u_0(x,t)$ é a solução do PVIF homogêneo com condições de fronteiras homogêneas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) - v(x), \ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0, \ u(40,t) = 0 \end{cases}$$

Logo

$$v(x) = 10\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10$$

$$u(x,t) = 10\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{40} e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de

$$f(x) - v(x) = -\frac{x}{4}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_n &= 2\left(-\frac{1}{4}\text{bn}(f_{0,1}^{(1)})\right) \\ &= -\frac{20}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \text{sen}\,s\right)\Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{20}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{20(-1)^n}{n\pi},\ n = 1,2,3\ldots \end{aligned}$$

Aqui usamos a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores. Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) \quad = \quad 10\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10 + \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{40}e^{-\frac{n^2\pi^2}{1600}t}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) = 10\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10, \quad \text{para } x \in [0,40]$$

ou seja, quando t tende a mais infinito a solução tende a solução estacionária

$$v(x) = 10\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{80} + \frac{x}{4} + 10.$$

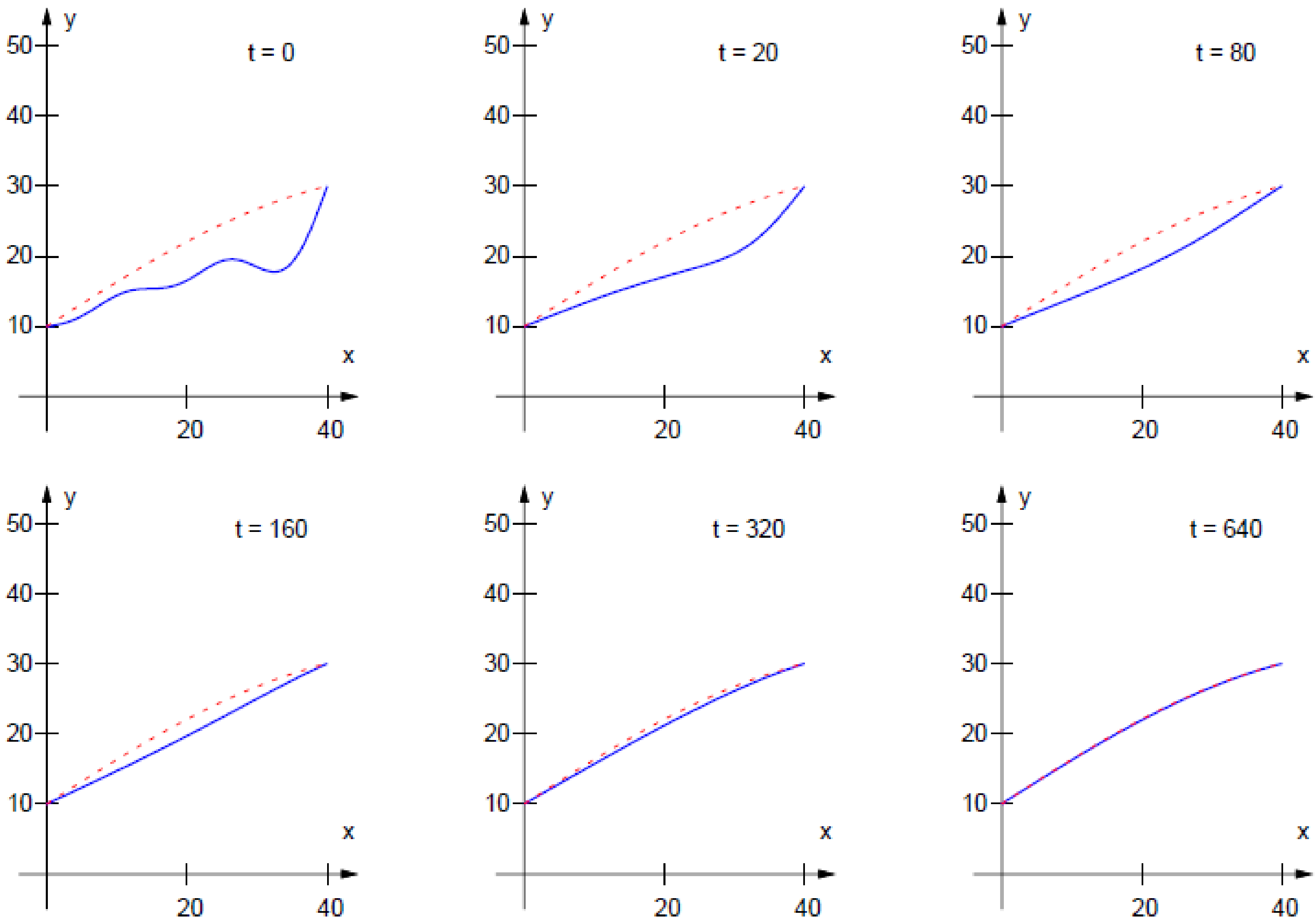

Figura 3.5 – Solução, $u(x, t)$, do PVIF do Exemplo 3.5 tomando apenas 3 termos não nulos da série.

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)