Escola Superior de Agricultura
“Luiz de Queiroz”
Universidade de São Paulo

LCE2112 – Estatística Aplicada às Ciências Sociais e Ambientais

Taciana Villela Savian
Sala 304, pav. Engenharia, ramal 237
tvsavian@usp.br
tacianavillela@gmail.com

Variáveis Aleatórias

Variável aleatória é uma função, $X(\omega)$, que associa a cada um dos resultados de um experimento aleatório um número real;

Experimento: Plantar três sementes em um vaso e avaliar a germinação das mesmas

Cada semente: G = germinou e N = não germinou

Espaço amostral Ω

Ω = {NNN , NNG, NGN, GNN, GGN, GNG, NGG, GGG}

Transformar os resultados do experimento em valores numéricos?

Variáveis Aleatórias

Variável aleatória é uma função que associa a cada um dos resultados de um experimento aleatório um número real;

$X(\omega) \rightarrow$ número de sementes germinadas

Espaço amostral Ω

Ω = {NNN , NNG, NGN, GNN, GGN, GNG, NGG, GGG}

$X(\omega)$ = {0 , 1 , 2 , 3}

Variáveis Aleatórias Discretas

Pode ser classificada como:

- ***Variável aleatória discreta:*** **os possíveis valores da variável pertencem ao conjunto dos números Inteiros**
  - ***geralmente associado à contagens***
- ***Variável aleatória contínua:*** **os possíveis valores da variável pertencem ao conjunto dos números Reais**
  - ***geralmente associado à medidas (mensuração)***

Variáveis Aleatórias Discretas

Pode ser classificada como:

- ***Variável aleatória discreta:*** **os possíveis valores da variável pertencem ao conjunto dos números Inteiros**
  - ***geralmente associado à contagens***

- ***Alguns exemplos:***
  - ***Número de plantas infectadas por uma praga;***
  - ***Número de insetos capturados em armadilhas;***
  - ***Número de empresas que adotam um plano de gerencial de descarte de resíduos;***
  - ***Número de famílias que usufruem de algum subsídio municipal;***

Variáveis Aleatórias Discretas

Pode ser classificada como:

- ***Variável aleatória contínua:*** **os possíveis valores da variável pertencem ao conjunto dos números Reais;**

- ***Alguns exemplos:***
  - ***Diâmetro de árvores (cm);***
  - ***Descarte de resíduos sólidos (t/ha);***
  - ***Consumo de água em uma comunidade (m^3/dia);***
  - ***Produção de resina (kg);***

Exercício – Aula passada

- Num levantamento de fauna, as aves em uma determinada área foram classificadas segundo a sua dieta preferencial em insetívoras (i) e frugívoras (F).

a) Represente o espaço amostral para uma amostra de três aves;

$$\Omega = \{FFF , FFi, FiF, iFF, iiF, iFi, Fii, iii\}$$

X(ω) → número de aves insetívoras

$$\mathbf{X(\omega) = \{0 \quad , 1 \quad , 2 \quad , 3\}}$$

Variáveis Aleatórias Discretas

Chama-se função de probabilidade (f.p.) da variável aleatória discreta X, a função que a cada valor de X associa sua probabilidade de ocorrência.

$$P[X = x_i] = p_i$$

Como notação, utilizaremos letras maiúsculas (X, Y, Z, W, etc.) para representar as variáveis aleatórias e letras minúsculas (x, y, z, w, etc.) para representar os valores que a variável aleatória assume.

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo: $$P[X = x_i] = p_i$$

Pontos amostrais em Ω	**Valores de X**	**Probabilidade**
(FFF)	**0**	**P[X = 0]**
(iFF, FiF,FFi)	**1**	**P[X = 1]**
(iiF, iFi, Fii)	**2**	**P[X = 2]**
(iii)	**3**	**P[X = 3]**

Devido às características da área e levantamento anteriores de fauna naquela área demonstram que a probabilidade de ocorrência de aves frugíveras é de 0,30 e de aves insetívoras é de 0,70.

P(F)=0,30 e P(i)=0,70

Variáveis Aleatórias Discretas

<u>Exemplo:</u> $$P[X = x_i] = p_i$$

Pontos amostrais em Ω	Valores de X	Probabilidade
(FFF)	**0**	**P[X = 0]**

$$P[X = 0] = p_i$$

$$P[X = 0] = 1 \times P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{F})$$

$$P[X = 0] = 1 \times 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,0270$$

X(ω) → número de aves insetívoras

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

$$P\left[X = x_i\right] = p_i$$

Pontos amostrais em Ω	Valores de X	Probabilidade
(iFF, FiF, FFi)	1	P[X = 1]

$$P\left[X = 1\right] = p_i$$

$$P\left[X = 1\right] = 3 \times P(\mathrm{i}) \times P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{F})$$

$$P\left[X = 1\right] = 3 \times 0,70 \times 0,30 \times 0,30 = 0,1890$$

X(ω) → número de aves insetívoras

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

$$P[X = x_i] = p_i$$

Pontos amostrais em Ω	Valores de X	Probabilidade
(iiF, iFi, Fii)	2	P[X = 2]

$$P[X = 2] = p_i$$

$$P[X = 2] = 3 \times P(\mathrm{i}) \times P(\mathrm{i}) \times P(\mathrm{F})$$

$$P[X = 2] = 3 \times 0,70 \times 0,70 \times 0,30 = 0,4410$$

X(ω) → número de aves insetívoras

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo: $P[X = x_i] = p_i$

Pontos amostrais em Ω	Valores de X	Probabilidade
(iii)	3	P[X = 3]

$$P\left[X = 3\right] = p_i$$

$$P\left[X = 3\right] = 1 \times P(\mathrm{i}) \times P(\mathrm{i}) \times P(\mathrm{i})$$

$$P\left[X = 3\right] = 1 \times 0,70 \times 0,70 \times 0,70 = 0,3430$$

X(ω) → número de aves insetívoras

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

Tabela 1. **Distribuição de probabilidades da variável aleatória X**, número de aves insetívoras em uma amostra de três aves.

Pontos amostrais em Ω	Valores de X	Probabilidade
(FFF)	0	P[X = 0]=0,0270
(iFF, FiF,FFi)	1	P[X = 1]=0,1890
(iiF, iFi, Fii)	2	P[X = 2]=0,4410
(iii)	3	P[X = 3]=0,3430

$X(\omega) \rightarrow$ número de aves insetívoras

Variáveis Aleatórias Discretas

Chama-se **função de probabilidade (f.p.)** **da variável aleatória discreta X, a função que a cada valor de X associa sua probabilidade de ocorrência.**

$$P[X = x_i] = p_i$$

Condições:

i) $P[X = x_i] \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k$

ii) $\sum_{i=1}^{k} P[X = x_i] = 1$

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

Tabela 1. **Distribuição de probabilidades da variável aleatória X**, número de aves insetívoras em uma amostra de três aves.

Pontos amostrais em Ω	**Valores de X**	**Probabilidade**
(FFF)	**0**	**P[X = 0]=0,0270**
(iFF, FiF,FFi)	**1**	**P[X = 1]=0,1890**
(iiF, iFi, Fii)	**2**	**P[X = 2]=0,4410**
(iii)	**3**	**P[X = 3]=0,3430**
	Total	**0,0270+...+0,3430=1,00**

X(ω) → número de aves insetívoras

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

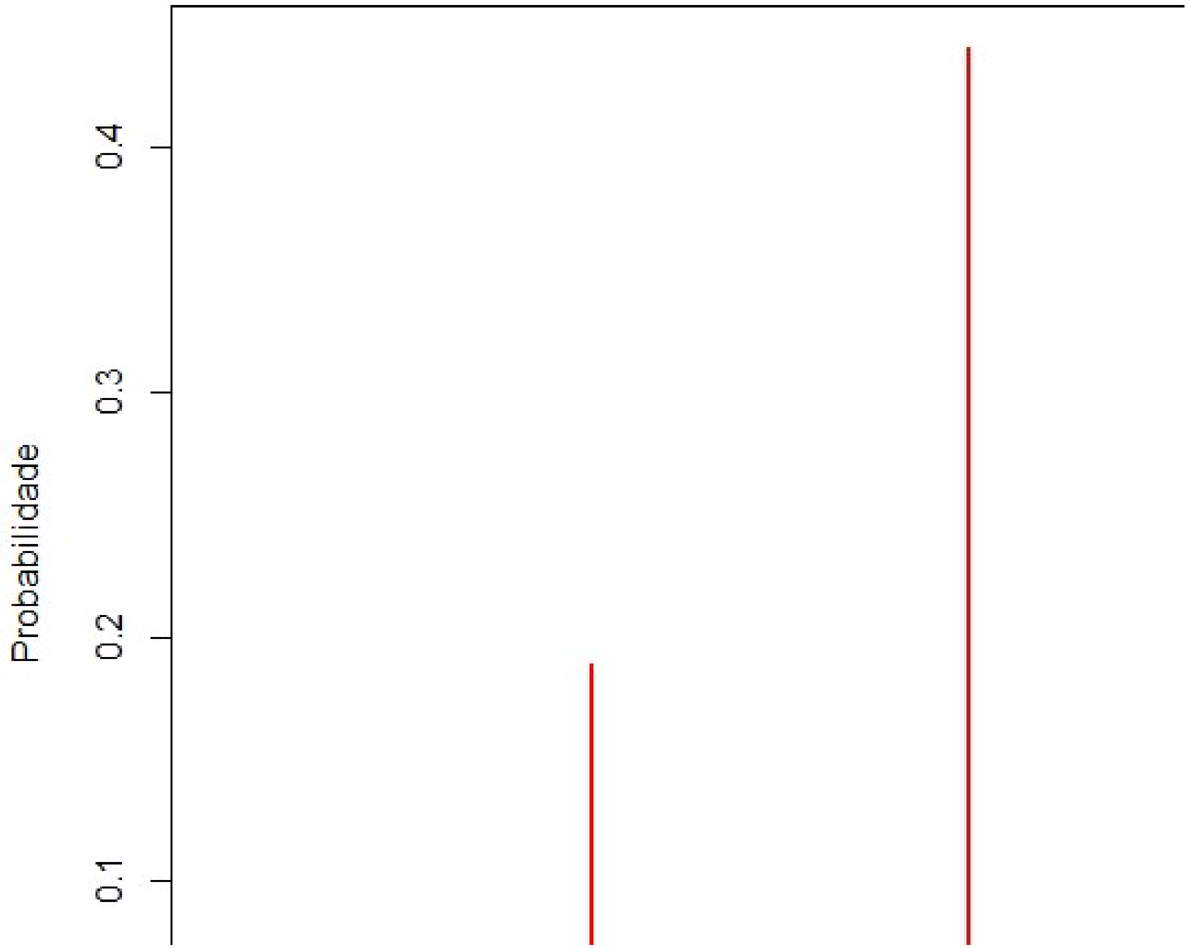

Figura 1. **Distribuição de probabilidades da variável aleatória X**, número de aves insetívoras (n=3).

Variáveis Aleatórias Discretas

Existem muitos problemas em que o interesse é conhecer com que probabilidade uma variável aleatória X assume valores menores que um particular x e nesse caso precisamos definir a **função de distribuição acumulada da variável aleatória X.**

$$F(x) = P[X \leq x_i]$$

Condições:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$

ii) É não decrescente: se $x_1 \leq x_2$ **então** $F(x_1) \leq F(x_2)$

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ **e** $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

Tabela 1. **Distribuição de probabilidades da variável aleatória X**, e **Função de Distribuição Acumulada** do número de aves insetívoras em uma amostra de três aves.

Pontos amostrais em Ω	Valores de X	P[X = xi]	$F(x) = P[X \leq x_i]$
(FFF)	0	P[X = 0]=0,0270	0,0270
(iFF, FiF,FFi)	1	P[X = 1]=0,1890	0,0270+0,1890
(iiF, iFi, Fii)	2	P[X = 2]=0,4410	0,0270+...+0,4410
(iii)	3	P[X = 3]=0,3430	0,0270+...+0,3430

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

Tabela 1. **Distribuição de probabilidades da variável aleatória X**, e **Função de Distribuição Acumulada** do número de aves insetívoras em uma amostra de três aves.

Pontos amostrais em Ω	**Valores de X**	**P[X = xi]**	$F(x) = P[X \leq x_i]$
(FFF)	**0**	**P[X = 0]=0,0270**	**0,0270**
(iFF, FiF,FFi)	**1**	**P[X = 1]=0,1890**	**0,2160**
(iiF, iFi, Fii)	**2**	**P[X = 2]=0,4410**	**0,6570**
(iii)	**3**	**P[X = 3]=0,3430**	**1,0000**

Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo:

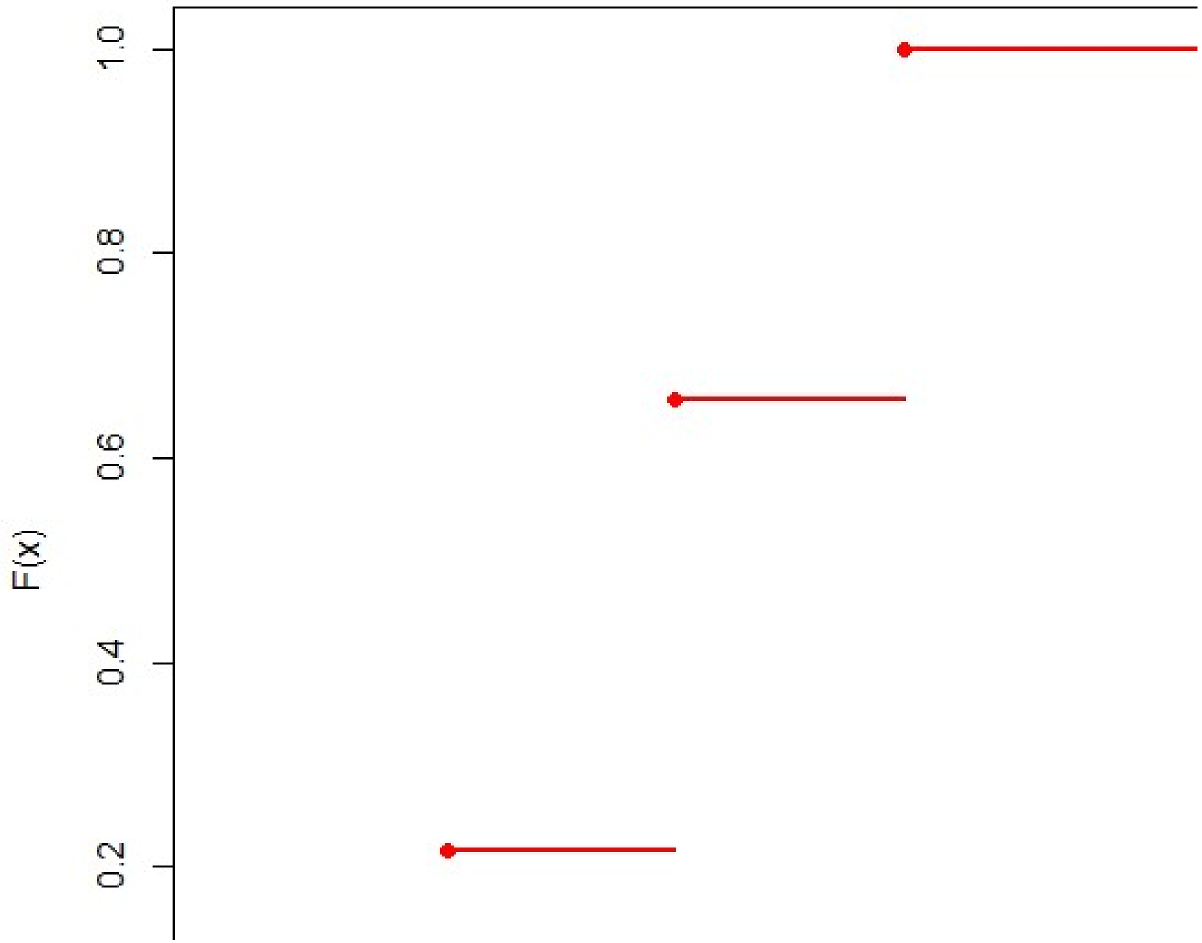

Figura 2. **Função de Distribuição Acumulada da variável aleatória X,** número de aves insetívoras (n=3).

Variáveis Aleatórias Discretas

Média de uma variável aleatória discreta

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x_i} \boldsymbol{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_i}]$$

No exemplo 2:

$$E(X) = (0 \times 0,0270) + (1 \times 0,1890) + (2 \times 0,4410) + (3 \times 0,3430)$$

$$E(X) = 2,1 \ aves\ insetívoras$$

A esperança matemática $\mathbf{E}(X)$ de uma variável aleatória discreta pode ser interpretada como a média dos valores observados dessa variável em uma sequência grande de repetições do experimento.

Variáveis Aleatórias Discretas

Variância de uma variável aleatória discreta

$$\mathbf{Var}(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i{}^2 P[X = x_i]$$

No exemplo 2:

$$E\left(X^2\right) = \left(0^2 \times 0{,}0270\right) + \left(1^2 \times 0{,}1890\right) + \left(2^2 \times 0{,}4410\right) + \left(3^2 \times 0{,}3430\right)$$

$$E\left(X^2\right) = 5{,}04 \ \ (aves\ insetívoras)^2$$

Logo,

$$Var\left(X\right) = 5{,}04 - \left(2{,}1\right)^2 = 0{,}63 \ \ \left(aves\ insetívoras\right)^2$$

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Temos, basicamente, dois tipos de variáveis aleatórias discretas a serem estudadas:**
  - **Contagens considerando um espaço amostral enumerável e finito → Modelos Binomiais;**
  - **Contagens considerando um espaço amostral enumerável porém infinito → Modelos de Poisson.**

Modelo de Distribuição Binomial

- Ele considera que um experimento tem dois possíveis resultados que podem ser chamados de **sucesso** e **fracasso (sim ou não)**.
- Para cada um destes resultados existe uma probabilidade associada de forma que a soma destas sempre será igual a 1.
- O interesse neste modelo é descrever o comportamento probabilístico do **número de sucessos (p)** em **n repetições do experimento.**

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1:** Considerando a população de estudantes da ESALQ em que 90% é favorável a uma mudança curricular, o número (X) de estudantes favoráveis à mudança em uma amostra aleatória de tamanho 10 é uma variável aleatória cuja distribuição é uma Binomial com parâmetros n=10 (tamanho da amostra) e p=0,90 (probabilidade de sucesso).

$$X \sim Bin(n;p)$$

$$X \sim Bin(10;0,90)$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 2:** Você planta 4 sementes de feijão em vasos e avalia a germinação das mesmas. Sabendo que porcentagem de germinação das sementes é de 70%, então a variável aleatória (X) número de sementes germinadas por vaso tem distribuição Binomial com parâmetros n=4 (tamanho da amostra) e p=0,70 (probabilidade de sucesso)

$$X \sim Bin(n;p)$$

$$X \sim Bin(4;0,70)$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **O modelo Binomial:**

$$P\left[X = x_i\right] = C_{x_i}^{n} \times p^{x_i} \times \left(1 - p\right)^{n - x_i}$$

em que:

$$C_{x_i}^{n} = \frac{n!}{x_i! \times \left(n - x_i\right)!}$$

Relembrando: 5! = 5x4x3x2x1 = 120

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1:** Considerando a população de estudantes da ESALQ em que 80% é favorável a uma mudança curricular. Sorteando uma amostra aleatória de 10 estudantes, **qual a probabilidade de 9 serem favoráveis à alteração curricular**?
- X~Bin(10;0,80)

$$P\left[X=9\right]=C_{9}^{10}\times 0,80^{9}\times\left(0,20\right)^{10-9}$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1: n=10, X=9 (são 9 F e 1 N) em que p=0,80**

(FFFFFFFFFN) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFFFFFFFNF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFFFFFFNFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFFFFFNFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFFFFNFFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFFFNFFFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFFNFFFFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FFNFFFFFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(FNFFFFFFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

(NFFFFFFFFF) = $(0,80)^9\,(0,20)^1$

10 possibilidades

$$C_{x_i}^{n} = \frac{n!}{x_i! \times (n - x_i)!}$$

$$C_{9}^{10} = \frac{10!}{9! \times (10-9)!} = \frac{10 \times \cancel{9}!}{\cancel{9}! \times (1)!} = 10$$

$$P[X = x_i] = C_{x_i}^{n} \times p^{x_i} \times (1 - p)^{n - x_i}$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1:** Considerando a população de estudantes da ESALQ em que 80% é favorável a uma mudança curricular. Sorteando uma amostra aleatória de 10 estudantes, **qual a probabilidade de 9 serem favoráveis à alteração curricular**?
- X~Bin(10;0,80)

$$P[X=9]=C_9^{10}\times 0,80^9\times(0,20)^{10-9}$$

$$P[X=9]=10\times 0,1342\times 0,2000=0,2684$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1:** Considerando a população de estudantes da ESALQ em que 80% é favorável a uma mudança curricular. Sorteando uma amostra aleatória de 10 estudantes,

Qual a probabilidade de no máximo 2 alunos serem favoráveis à alteração curricular?

X~Bin(10;0,80)

$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1:**

$$P\left[X=0\right]=C_0^{10}\left(0,80\right)^0\left(0,20\right)^{10}=????$$

$$P\left[X=1\right]=C_1^{10}\left(0,80\right)^1\left(0,20\right)^{9}=????$$

$$P\left[X=2\right]=C_2^{10}\left(0,80\right)^2\left(0,20\right)^{8}=????$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 1:**

$$P\left[X=0\right]=C_0^{10}\left(0,80\right)^0\left(0,20\right)^{10}=0,0000001$$

$$P\left[X=1\right]=C_1^{10}\left(0,80\right)^1\left(0,20\right)^9=0,000004$$

$$P\left[X=2\right]=C_2^{10}\left(0,80\right)^2\left(0,20\right)^8=0,000074$$

$$P\left[X\leq 2\right]=P\left[X=0\right]+P\left[X=1\right]+P\left[X=2\right]$$

$$P\left[X\leq 2\right]=0,0000001+0,000004+0,000074=0,0001$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 2:** Você planta 4 sementes de feijão em vasos e avalia a germinação das mesmas. Sabendo que porcentagem de germinação das sementes é de 70%, então a variável aleatória (X) número de sementes germinadas por vaso tem distribuição Binomial com parâmetros n=4 (tamanho da amostra) e p=0,70 (probabilidade de sucesso). **Qual a probabilidade de exatamente 2 sementes germinarem?**

X ~Bin(4;0,70)

$$P[X=2]=C_2^4\times 0{,}70^2\times(0{,}30)^{4-2}=\frac{4!}{2!\times(4-2)!}\times 0{,}70^2\times(0{,}30)^2$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 2:** Você planta 4 sementes de feijão em vasos e avalia a germinação das mesmas. Sabendo que porcentagem de germinação das sementes é de 70%, então a variável aleatória (X) número de sementes germinadas por vaso tem distribuição Binomial com parâmetros n=4 (tamanho da amostra) e p=0,70 (probabilidade de sucesso). **Qual a probabilidade de exatamente 2 sementes germinarem?**

X ~Bin(4;0,70)

$$P[X=2]=\frac{4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}\times 2\times 1}\times 0{,}49\times 0{,}09=0{,}2646$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 2: X ~Bin(4;0,70)**

Qual a probabilidade de exatamente 3 sementes germinarem?

Qual a probabilidade de pelo menos 3 sementes germinarem?

Qual a probabilidade de no mínimo 3 sementes germinarem?

Qual a probabilidade germinarem não mais do que 3 sementes?

Qual a probabilidade germinarem no máximo 3 sementes?

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 2: X ~Bin(4;0,70)**

Qual a probabilidade de exatamente 3 sementes germinarem? $P[X=3]=0{,}4116$

Qual a probabilidade de pelo menos 3 sementes germinarem? $P[X\geq 3]=0{,}6517$

Qual a probabilidade de no mínimo 3 sementes germinarem? $P[X\geq 3]=0{,}6517$

Qual a probabilidade germinarem não mais do que 3 sementes? $P[X\leq 3]=0{,}7599$

Qual a probabilidade germinarem no máximo 3 sementes?

$$P[X\leq 3]=0{,}7599$$

Modelo de Distribuição Binomial

- **O modelo Binomial:**

$$P[X = x_i] = C_{x_i}^{n} \times p^{x_i} \times (1 - p)^{n - x_i}$$

- **Média:**

E(X) = np

- **Variância:**

Var(X)=np(1-p)

Modelo de Distribuição Binomial

- **Exemplo 3:**

$X \sim Bin(4;0,70)$

- **Média:** **$E(X) = 4 \times 0,7 = 2,8$ sementes**

Em uma vaso com 4 sementes espera-se que em média 2,8 sementes germinem.

- **Variância:** **$Var(X)=4 \times 0,7 \times 0,3 = 0,84$ sementes²**
- **Desvio padrão:** **$S(X)=\sqrt{0,84} = 0,92$ sementes**

Variáveis Aleatórias Discretas

- **Temos, basicamente, dois tipos de variáveis aleatórias discretas a serem estudadas:**
  - **Contagens considerando um espaço amostral enumerável e finito → Modelos Binomiais;**
  - **Contagens considerando um espaço amostral enumerável porém infinito → Modelos de Poisson.**

Modelo de Distribuição Poisson

- **Uma outra distribuição muito comum é a distribuição Poisson, e é frequentemente usada para modelar o número de ocorrências de um evento por um certo período de tempo ou por um certo volume ou por uma certa área (por uma unidade de medida qualquer);**
- **Enquanto a distribuição binomial pode ser usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos em n tentativas, a distribuição de Poisson é usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos por unidade de intervalo.**

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplos:**
  - **Nº de insetos predadores por folha, em milho;**
  - **Nº acidentes com moto em uma determinada estrada/mês;**
  - **Nº de colônia de bactérias de uma dada cultura/0,01mm²;**
- **Estudo do padrão de dispersão de uma certa espécie (vegetal/animal) em uma determinada área → nº de quadrantes com 0, 1, 2....indivíduos.**

Modelo de Distribuição Poisson

- **A distribuição Poisson tem apenas um parâmetro, λ, que é interpretado como uma taxa média de ocorrência do evento, e a probabilidade de ocorrer exatamente o evento $X = x_i$, ou seja, o Modelo de Poisson é dado por:**

$$P[X = x_i] = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

em que: $e \approx 2,7183$ e $\lambda > 0$.

- **Se $\mathrm{X} \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, então:**

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 1:** Um investigador está interessado no número de ovos depositados por uma espécie de pássaro. Na primavera, ele procura e acha 80 ninhos. O número médio de ovos por ninho foi 3,8 e a variância 3,5. Como a variância é "aproximadamente" igual a média, ele acha que pode ser razoável descrever a variável **"número de ovos por ninho"** como tendo uma distribuição Poisson com média $\lambda = 3{,}8\,\frac{ovos}{ninho}$.

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 1:**

X: **número de ovos por ninho**

$X \sim Poisson(3,8)$

a. **Se esta realmente representa a distribuição populacional, qual seria a probabilidade de encontrar um ninho com mais do que 5 ovos?**

$$P[X > 5] = ?????$$

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 1:**

$\boldsymbol{X}$**: número de ovos por ninho**

$\boldsymbol{X \sim Poisson(3,8)}$

a. **Se esta realmente representa a distribuição populacional, qual seria a probabilidade de encontrar um ninho com mais do que 5 ovos?**

A soma de todas as probabilidade é igual a 1

$$\boldsymbol{P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5]}$$

$$\boldsymbol{P[X > 5] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + \cdots + P[X = 5]\}}$$

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 1:**

X: **número de ovos por ninho,** $\quad X \sim Poisson(3,8)$

$$P[X = x_i] = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

$$P[X = 0] = \frac{3,8^{0} e^{-3,8}}{0!} = \qquad P[X = 1] = \frac{3,8^{1} e^{-3,8}}{1!} =$$

$$P[X = 2] = \frac{3,8^{2} e^{-3,8}}{2!} = \qquad P[X = 3] = \frac{3,8^{3} e^{-3,8}}{3!} =$$

$$P[X = 4] = \frac{3,8^{4} e^{-3,8}}{4!} = \qquad P[X = 5] = \frac{3,8^{5} e^{-3,8}}{5!} =$$

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 1:**

X: **número de ovos por ninho,** $X \sim Poisson(3,8)$

$$P[X = x_i] = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

$$P[X = 0] = \frac{3,8^{0} e^{-3,8}}{0!} = 0,0224 \qquad P[X = 1] = \frac{3,8^{1} e^{-3,8}}{1!} = 0,0850$$

$$P[X = 2] = \frac{3,8^{2} e^{-3,8}}{2!} = 0,1615 \qquad P[X = 3] = \frac{3,8^{3} e^{-3,8}}{3!} = 0,2046$$

$$P[X = 4] = \frac{3,8^{4} e^{-3,8}}{4!} = 0,1944 \qquad P[X = 5] = \frac{3,8^{5} e^{-3,8}}{5!} = 0,1477$$

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 1:**

X: **número de ovos por ninho,** $X \sim Poisson(3,8)$

$$P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5]$$
$$P[X > 5] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1] + \cdots + P[X = 5]\}$$

$$P[X > 5] = 1 - \{0,0224 + 0,0850 + \cdots + 0,1944 + 0,1477\}$$
$$P[X > 5] = 1 - \{0,8156\} = 0,1844$$

Ou seja, a probabilidade de encontrar um ninho com mais do que 5 ovos é de 0,1844.

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 2: Uma central telefônica recebe uma média (λ) de 5 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson, ou seja, $X \sim Poisson(5)$, qual é a probabilidade de que:**

a) A central não receba nenhuma chamada em um minuto?

$$P[X = 0] = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{5^{0} e^{-5}}{0!} = 0,0067$$

b) Ela receba no máximo 2 chamadas em 2 minutos?

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 2: (alteração do valor médio)**

Resolução:

b) Ela receba no máximo 2 chamadas em 2 minutos?

Primeira coisa é olhar no cálculo da probabilidade se a unidade de medida é a mesma do enunciado. Se não for tem que primeiro fazer a alteração do valor médio (λ)

1 minuto → 5 chamadas **λ=10 chamadas/dois minutos**

2 minutos → ? chamadas

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exemplo 2: (alteração do valor médio)**

b) Ela receba no máximo 2 chamadas em 2 minutos?

Resolução:

b) Considerando λ=10 chamadas/dois minutos

$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]$$

$$\left.\begin{array}{l}
P[X = 0] = \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \dfrac{10^{0} e^{-10}}{0!} = 0,00005 \\
P[X = 1] = \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \dfrac{10^{1} e^{-10}}{1!} = 0,00045 \\
P[X = 2] = \dfrac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \dfrac{10^{2} e^{-10}}{2!} = 0,00227
\end{array}\right\} P[X \leq 2] = 0,00277$$

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exercícios:**

1) Num certo ano, o IBAMA registrou no litoral catarinense (área de reserva), 25 mortes de golfinhos.

a) Qual é a probabilidade de, num determinado mês do próximo ano, ocorrerem menos de 5 mortes?

b) Qual é a probabilidade de ocorrerem 8 mortes no próximo semestre?

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exercícios:**

1) Num certo ano, o IBAMA registrou no litoral catarinense (área de reserva), 25 mortes de golfinhos.

a) Qual é a probabilidade de, num determinado mês do próximo ano, ocorrerem menos de 5 mortes?

R: 0,9396

b) Qual é a probabilidade de ocorrerem 8 mortes no próximo semestre?

R: 0,0551

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exercícios:**

2) Supondo-se que durante o abate de suínos, em um determinado frigorífico, o número de suínos descartados pelo Serviço de Inspeção Federal seja uma variável aleatória com média de 90 animais por mês (30 dias). Pergunta-se, qual a probabilidade de serem descartados:

a) Quatro suínos por dia?

b) Pelo menos dois suínos por dia?

Modelo de Distribuição Poisson

- **Exercícios:**

2) Supondo-se que durante o abate de suínos, em um determinado frigorífico, o número de suínos descartados pelo Serviço de Inspeção Federal seja uma variável aleatória com média de 90 animais por mês (30 dias). Pergunta-se, qual a probabilidade de serem descartados:

a) Quatro suínos por dia?

R: 0,1680

b) Pelo menos dois suínos por dia?

R: 0,8008

Poisson como aproximação da Binomial

- **Podemos utilizar a Distribuição de Poisson como uma aproximação da Distribuição Binomial quando:**
  - **"n" é grande e "p", muito pequeno**

$$n > 30 \text{ e } np \leq 5 \textit{(regra empírica)}$$

- **Ao utilizarmos Poisson como aproximação da Binomial, podemos achar o valor de λ pela fórmula:**

$$\lambda = np$$

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 5 peças defeituosas numa amostra de 200 peças extraída de um grande lote onde a probabilidade de haver uma peça defeituosa é de 0,02.

Poisson como aproximação da Binomial

$$n > 30 \qquad \text{e} \qquad np \leq 5 \textit{(regra empírica)}$$

$$\lambda = np$$

Exemplo: **Determinar a probabilidade de haver 5 peças defeituosas numa amostra de 200 peças extraída de um grande lote onde a probabilidade de haver uma peça defeituosa é de 0,02.**

$$n = 200$$

$$\lambda = np = 200 \times 0,02 = 4$$

Pela Poisson

$$P[X = 5] = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = 0,1563$$

Poisson como aproximação da Binomial

Exemplo: Determinar a probabilidade de haver 5 peças defeituosas numa amostra de 200 peças extraída de um grande lote onde a probabilidade de haver uma peça defeituosa é de 0,02.

$$n = 200$$

$$\lambda = np = 200 \times 0,02 = 4$$

Pela Binomial $P[X = x_i] = \binom{n}{x_i} (p)^{x_i} (1 - p)^{n - x_i}$

$$P[X = 5] = \binom{200}{5} (0,02)^5 (1 - 0,02)^{200-5}$$

Poisson como aproximação da Binomial

Exemplo: **Determinar a probabilidade de haver 5 peças defeituosas numa amostra de 200 peças extraída de um grande lote onde a probabilidade de haver uma peça defeituosa é de 0,02.**

$$n = 200$$

$$\lambda = np = 200 \times 0,02 = 4$$

Pela Binomial $\quad P[X = x_i] = \binom{n}{x_i} (p)^{x_i} (1 - p)^{n - x_i}$

$$P[X = 5]$$
$$= 2.535.650.040(0,000000003)(0,019457398)$$
$$= 0,1579$$

Poisson como aproximação da Binomial

- **Exercícios:**

1) Os registros mostram que há uma probabilidade de 0,0012 de uma pessoa se intoxicar na lanchonete de um parque. Determine a probabilidade de que, de 1.000 pessoas que visitam o parque, no máximo duas se intoxiquem.

Poisson como aproximação da Binomial

- **Exercícios:**

1) Os registros mostram que há uma probabilidade de 0,0012 de uma pessoa se intoxicar na lanchonete de um parque. Determine a probabilidade de que, de 1.000 pessoas que visitam o parque, no máximo duas se intoxiquem.

R: 0,8794

Poisson como aproximação da Binomial

- **Exercícios:**

2) Se a probabilidade de um indivíduo sofrer uma reação nociva, resultante da infecção de um determinado soro é 0,0001. Determinar a probabilidade de, entre 2.000 indivíduos:

a) exatamente três sofrerem a reação;

R: 0,0011

b) mais de dois sofrerem a reação.

R: 0,0012