FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Disciplina : CÁLCULO II (LOB 1004)

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

1- FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

NESTA SEÇÃO ESTUDAREMOS AS FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS SOB QUATRO PONTOS DE VISTA DIFERENTES:

- VERBALMENTE (PELA DESCRIÇÃO EM PALAVRAS)
- NUMERICAMENTE (POR UMA TABELA DE VALORES)
- ALGEBRICAMENTE (POR UMA FÓRMULA EXPLÍCITA)
- VISUALMENTE (POR UM GRÁFICO OU CURVAS DE NÍVEL)

A TEMPERATURA *T* EM UM PONTO DA SUPERFÍCIE DA TERRA EM DADO INSTANTE DE TEMPO DEPENDE DA LONGITUDE *X* E DA LATITUDE *Y* DO PONTO.

- PODEMOS PENSAR EM *T* COMO UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS *X* E *Y*, OU COMO UMA FUNÇÃO DO PAR (*X*, *Y*).

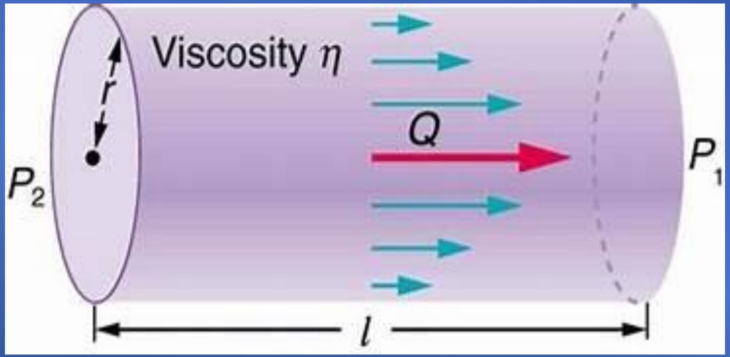
- INDICAMOS ESSA DEPENDÊNCIA FUNCIONAL ESCREVENDO *T* = *F*(*X*, *Y*).

O VOLUME *V* DE UM CILINDRO CIRCULAR DEPENDE DE SEU RAIO *R* E DE SUA ALTURA *H*.

- DE FATO, SABEMOS QUE $V = \pi R^2 H$.

- PODEMOS DIZER QUE *V* É UMA FUNÇÃO DE *R* E DE *H*.

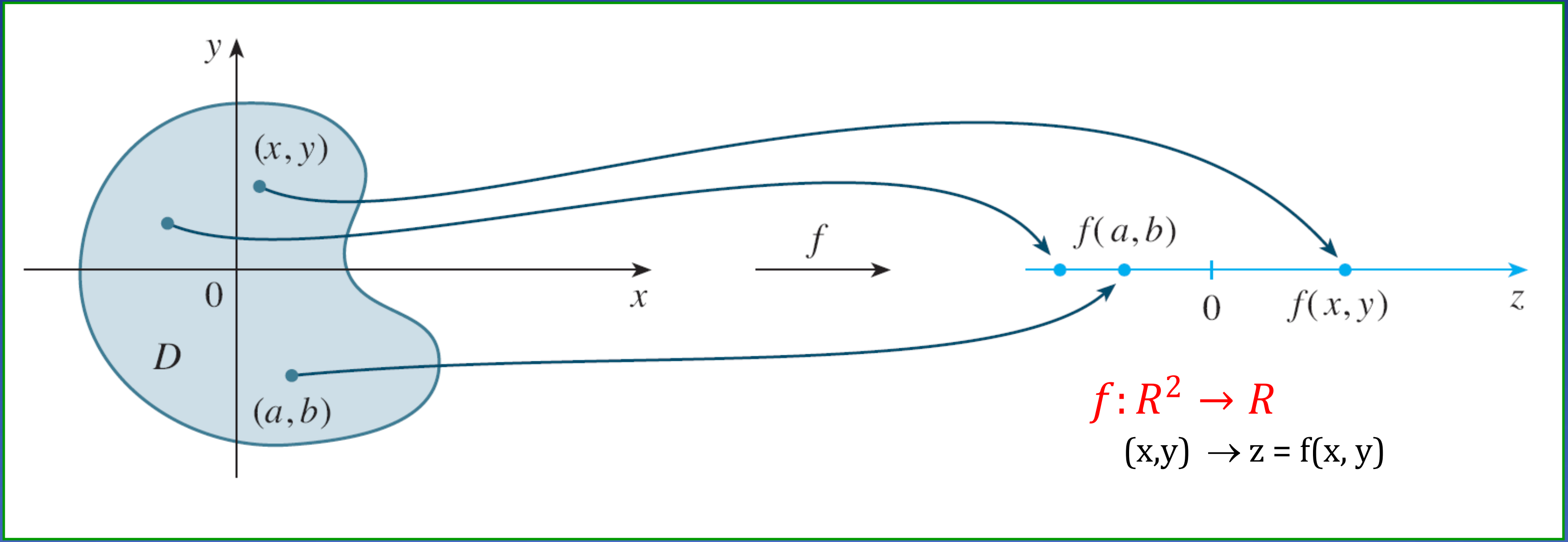
- ESCREVEMOS $V(R, H) = \pi R^2 H$.



FREQUENTEMENTE ESCREVEMOS $Z = F(X, Y)$ PARA TORNAR EXPLÍCITOS OS VALORES TOMADOS POR F EM UM PONTO GENÉRICO (X, Y).

- AS VARIÁVEIS X E Y SÃO VARIÁVEIS INDEPENDENTES;
- Z É A VARIÁVEL DEPENDENTE;
- COMPARE COM A NOTAÇÃO $Y = F(X)$ PARA AS FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL.

UMA MANEIRA DE VISUALIZAR ESSA FUNÇÃO É PELO DIAGRAMA DE SETAS, NO QUAL O DOMÍNIO *D* É REPRESENTADO COMO UM SUBCONJUNTO DO PLANO *XY*.



UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS É SIMPLESMENTE AQUELA:

CUJO DOMÍNIO É UM SUBCONJUNTO DE R^2;

CUJA IMAGEM É UM SUBCONJUNTO DE R,

2- DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

UMA FUNÇÃO *F* DE DUAS VARIÁVEIS É UMA REGRA QUE ASSOCIA A CADA PAR ORDENADO DE NÚMEROS REAIS (*X*, *Y*) DE UM CONJUNTO *D* UM ÚNICO VALOR REAL, DENOTADO POR *F* (*X*, *Y*).

- O CONJUNTO *D* É O DOMÍNIO DE *F*
- SUA IMAGEM É O CONJUNTO DE VALORES POSSÍVEIS DE *F*, OU SEJA,

$$\{F(X, Y) \mid (X, Y) \in D\}$$

EXEMPLO 1:

Para cada uma das seguintes funções, calcule *f* (3, 2) e encontre o domínio.

a- $$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

b- $$f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$$

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

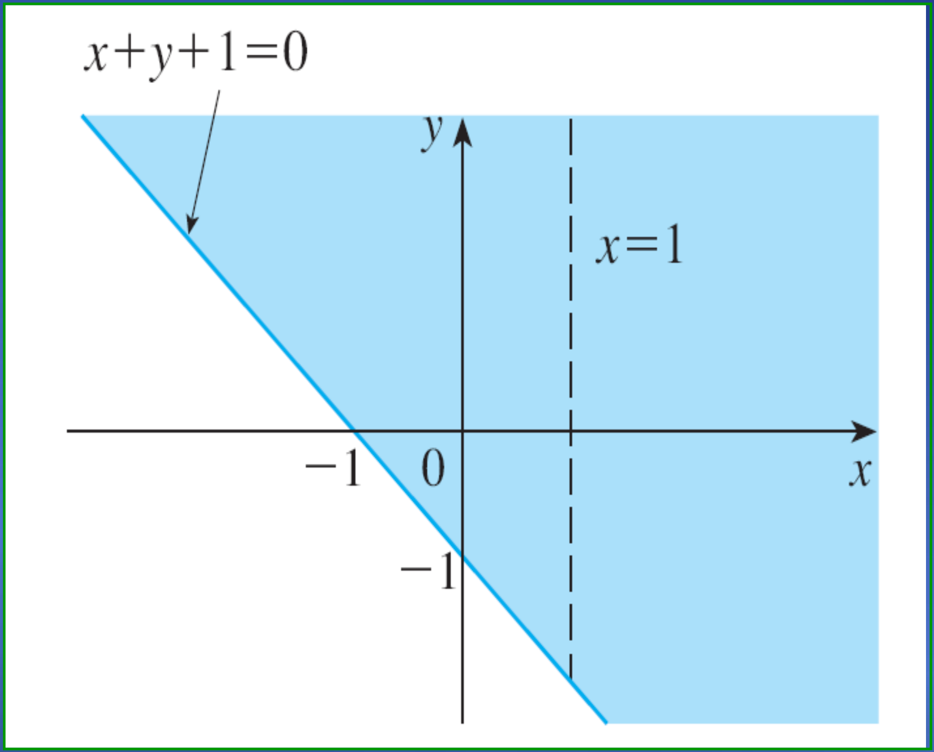
- A expressão para *f* está bem definida se o denominador for diferente de 0 e o número cuja raiz quadrada será extraída for não negativo.

- Portanto, o domínio de *f* é

  $D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$

A desigualdade $x + y + 1 \geq 0$, ou $y \geq -x - 1$, descreve os pontos que estão sobre ou acima da reta $y = -x - 1$

- $x \neq 1$ significa que os pontos sobre a reta x = 1 precisam ser excluídos do domínio.



$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3)$$
$$= 3 \ln 1$$
$$= 0$$

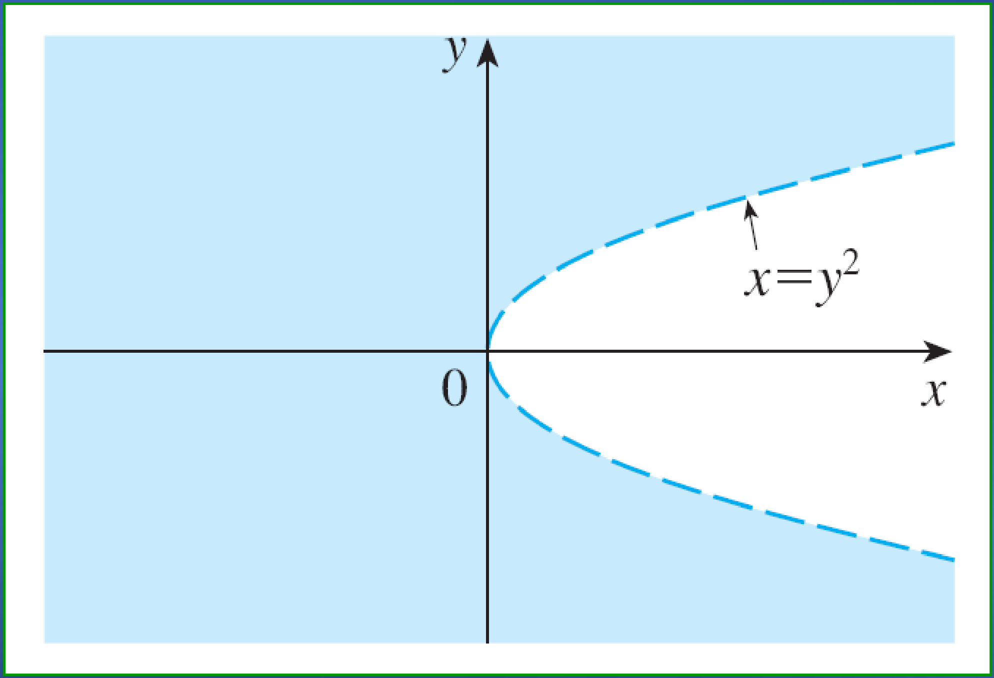
Como ln($y^2 - x$) está definido somente quando $y^2 - x > 0$, ou seja, $x < y^2$, o domínio de f será:

$$D = \{(x, y) | \; x < y^2\}$$

Isso representa o conjunto

de pontos à esquerda da parábola

$x = y^2$.



Nem todas as funções podem ser representadas por fórmulas explícitas.

- A função do próximo exemplo é descrita verbalmente e por estimativas numéricas de seus valores.

EXEMPLO 2:

Em regiões com inverno severo, o *índice de sensação térmica* é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v.

Assim, W é uma função de T e de v, e podemos escrever $W = f(T, v)$.

A Tabela que segue apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

Tabela 1- Temperatura real *x* Velocidade do vento

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por exemplo, a tabela mostra que, se a temperatura é –5°C e a velocidade do vento, 50 km/h, então subjetivamente parecerá tão frio quanto uma temperatura de cerca de –15°C sem vento.

Portanto, $f(–5, 50) = –15$

Outros exemplos:

f(-15, 20)

f(-30, 80)

EXEMPLO 3:

Em 1928, Charles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelavam o crescimento da economia norte-americana durante o período de 1899 a 1922.

Eles consideraram uma visão simplificada na qual a produção é determinada pela quantidade de trabalho e pela quantidade de capital investido. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso.

A função utilizada para modelar a produção era da forma:

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

- *P* é a produção total (valor monetário dos bens produzidos no ano);

- *L*, a quantidade de trabalho (número total de pessoas-hora trabalhadas em um ano);

- *K*, a quantidade de capital investido (valor monetário das máquinas, equipamentos e prédios).

Tabela 2- Dados econômicos publicados pelo governo norte-americano

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

O ano de 1899 foi considerado como base

- *P*, *L*, e *K* foram tomados valendo 100 nesse ano.
- Os valores para outros anos foram expressos como porcentagens dos valores de 1899.

Ano	*P*	*L*	*K*
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

Cobb e Douglas utilizaram o método dos mínimos quadrados para ajustar os dados da tabela à função

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25} \qquad (1)$$

Se usarmos o modelo dado pela função da equ

calcular a produção nos anos de 1910 e 1920,

valores

$$P(147, 208) = 1{,}01(147)^{0{,}75}(208)^{0{,}25} \approx 161{,}9$$

$$P(194, 407) = 1{,}01(194)^{0{,}75}(407)^{0{,}25} \approx 235{,}8$$

Ano	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

que são muito próximos dos valores reais, 159 e 231.

A função de produção (1) foi usada posteriormente em muitos contextos, de firmas individuais e até em questões globais de economia. Ficou conhecida como função de produção de Cobb-Douglas.

Seu domínio é: $\{(L, K) \mid L \geq 0, K \geq 0\}$

- **Como *L* e *K* representam trabalho e capital, não podem ser negativos.**

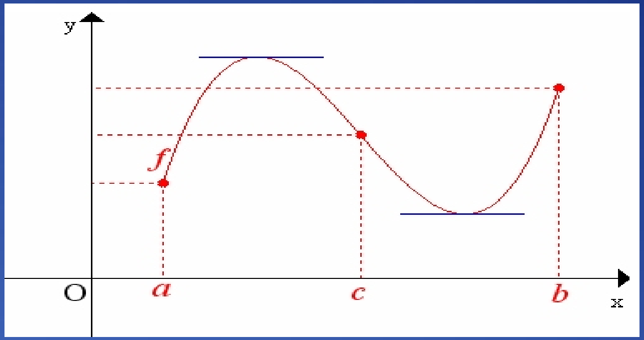
3- DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS - GRÁFICOS

Outra forma de visualizar o comportamento de uma função de duas variáveis é considerar seu gráfico.

Se *f* é uma função de duas variáveis com domínio *D*, então o gráfico de *f* é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em R^3 tal que $z = f(x, y)$ e (x, y) pertença a *D*.

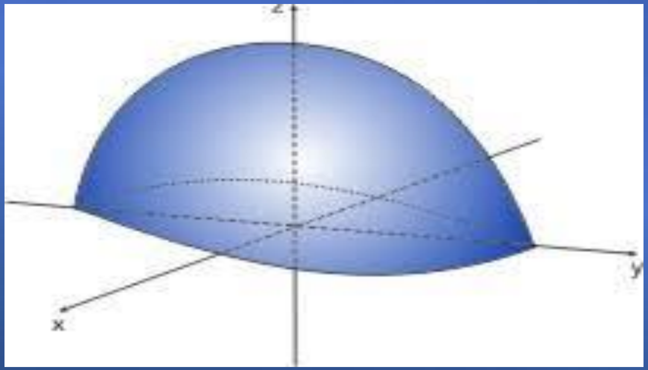
O gráfico de uma função *f* de uma única variável é uma curva *C* com a seguinte equação:

$$y = f\,(x)$$

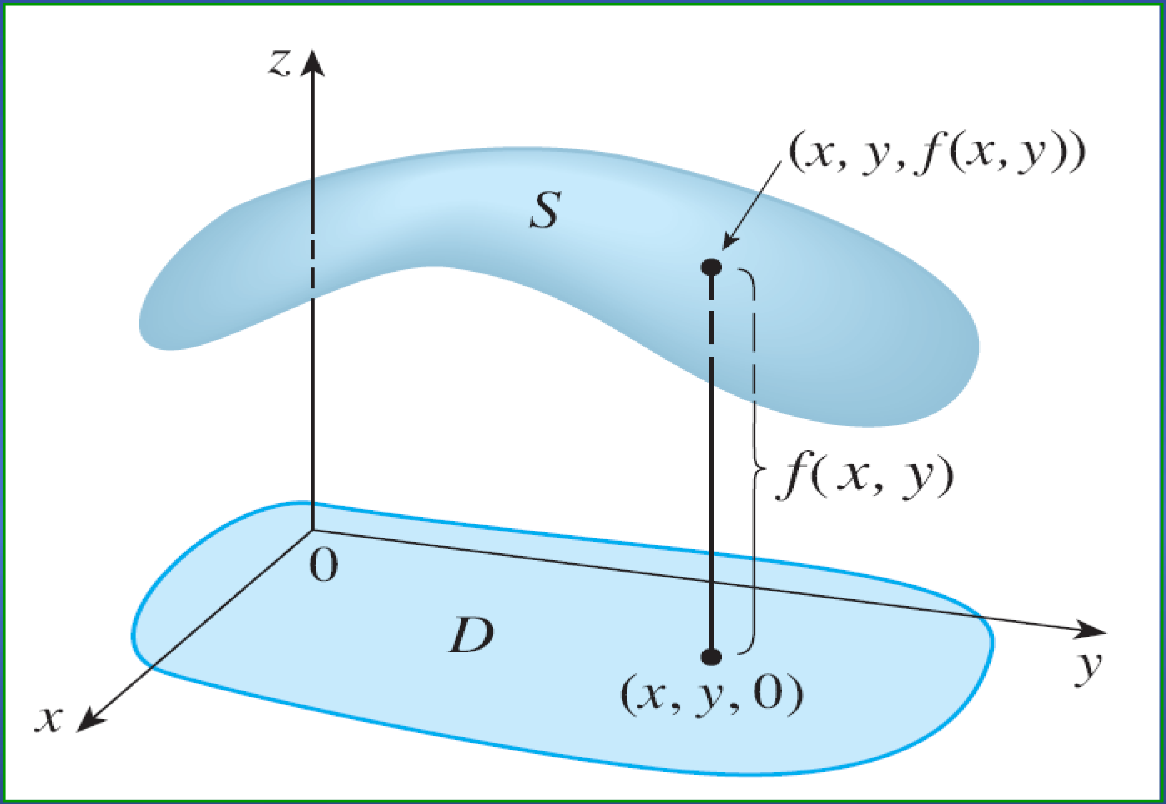


Assim, o gráfico de uma função com duas variáveis é uma superfície *S* com a seguinte equação:

$$z = f\,(x, y)$$



Podemos visualizar o gráfico *S* de *f* como estando diretamente acima ou abaixo de seu domínio *D* no plano *xy*.



EXEMPLO 4:

Esboce o gráfico da função

$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

O gráfico de f tem a equação

$$z = 6 - 3x - 2y$$

ou

$$3x + 2y + z = 6$$

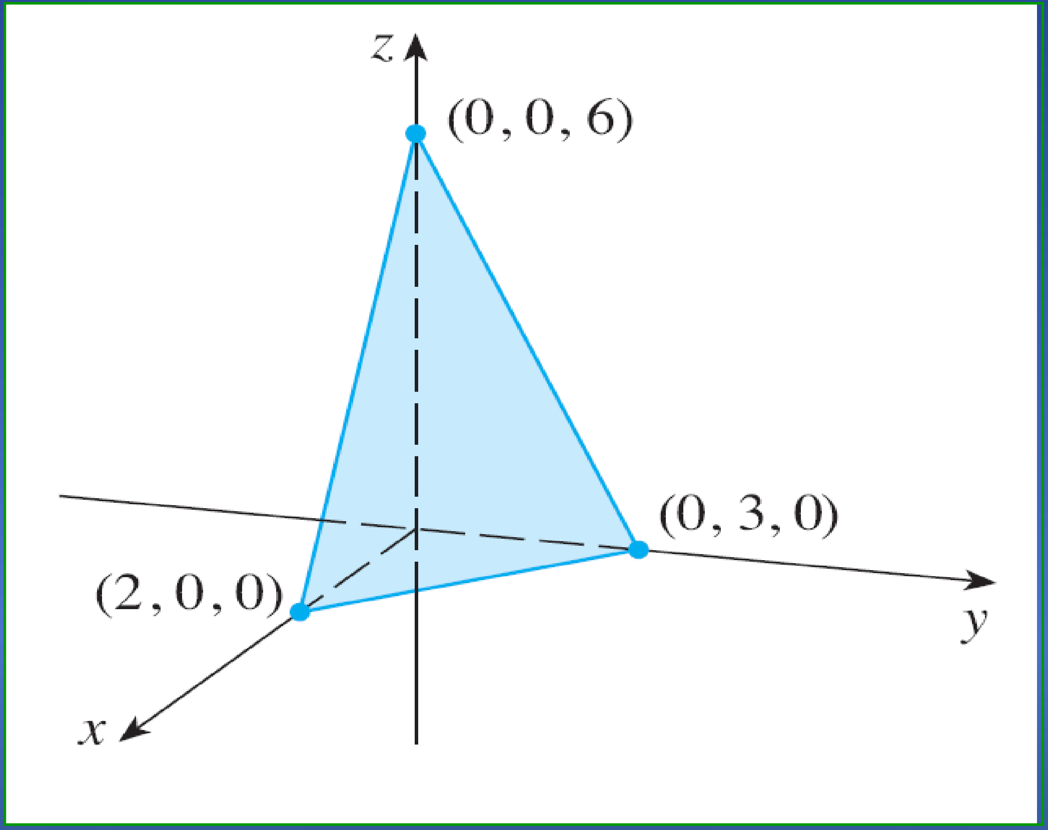
que representa um plano.

Para desenhar o plano, primeiro achamos as intersecções com os eixos.

- **Fazendo $y = z = 0$ na equação, obtemos $x = 2$ como a intersecção com o eixo x.**

- **Analogamente, a intersecção com o eixo y é 3 e a intersecção com o eixo z é 6.**

Isso nos auxília a esboçar a parte do gráfico que se encontra no primeiro octante.



A função do Exemplo 4 é um caso especial da função

$f(x, y) = ax + by + c$ (função linear)

O gráfico de uma destas funções tem a equação

$z = ax + by + c$

ou

$ax + by - z + c = 0$

e, portanto, é um plano.

FUNÇÃO LINEAR

Do mesmo modo que as funções lineares de uma única variável são importantes no cálculo de uma variável, veremos que as funções lineares de duas variáveis têm um papel central no cálculo com muitas variáveis.

EXEMPLO 5:

Esboce o gráfico de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

O gráfico apresenta a seguinte equação:

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação, obtém-se

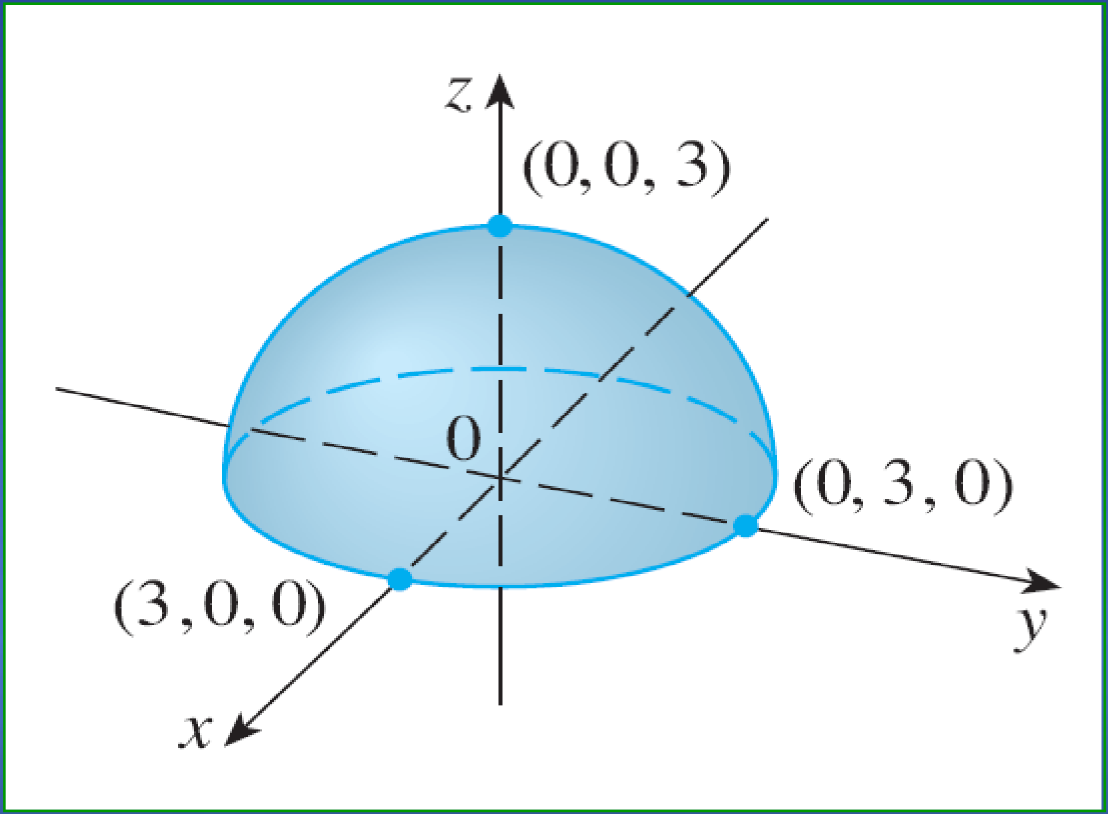
$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Reconhecemos essa equação como a equação da esfera de centro na origem e raio 3.

Mas, como $z \geq 0$, o gráfico de g é somente a metade superior da esfera.



3.1- FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS - GRÁFICOS

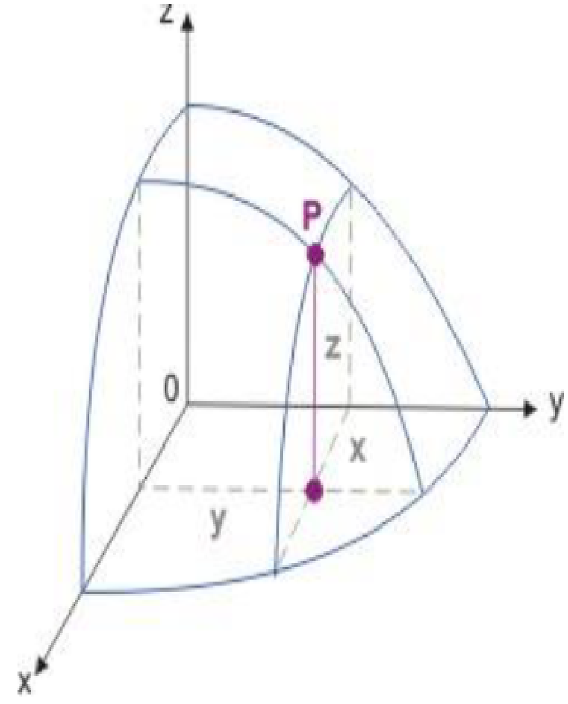
O conjunto

$$G_f = \{(x, y, z) \in R^3 | z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

denomina-se gráfico de f.

O gráfico de f também é chamado de

SUPERFÍCIE.

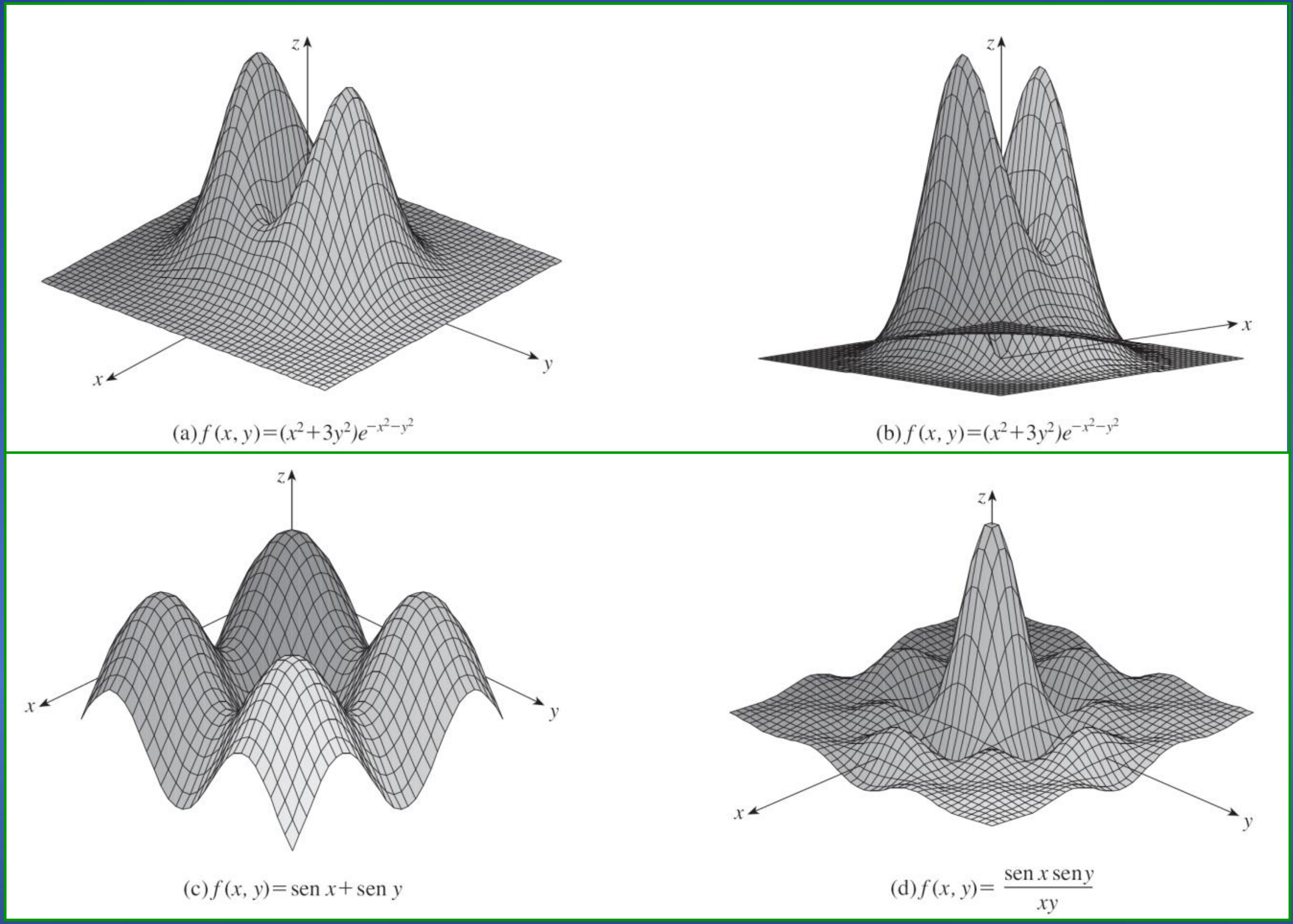


3.2- GRÁFICOS GERADOS POR COMPUTADOR

Existem programas de computador desenvolvidos para traçar os gráficos de funções de duas variáveis.

Na maioria desses programas, são desenhados os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ para os valores de k igualmente espaçados, e as linhas do gráfico que estariam escondidas são removidas.

A figura a seguir apresenta uma série de gráficos de diversas funções, gerados por computador.



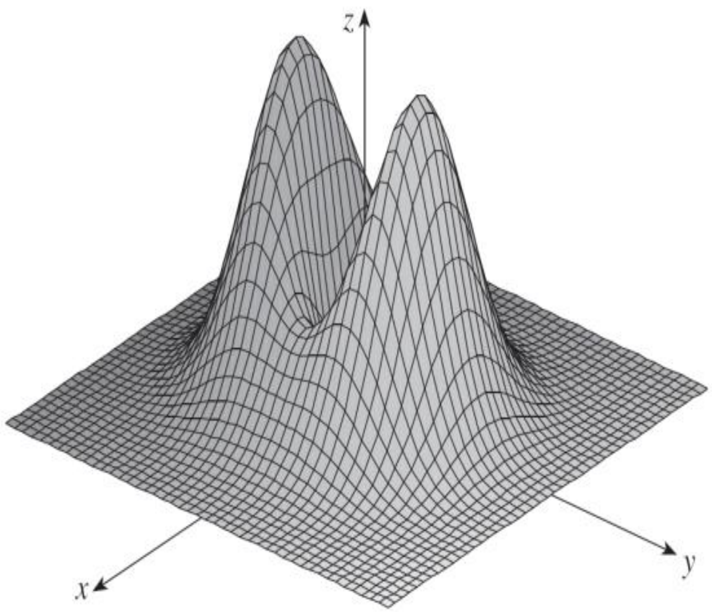
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

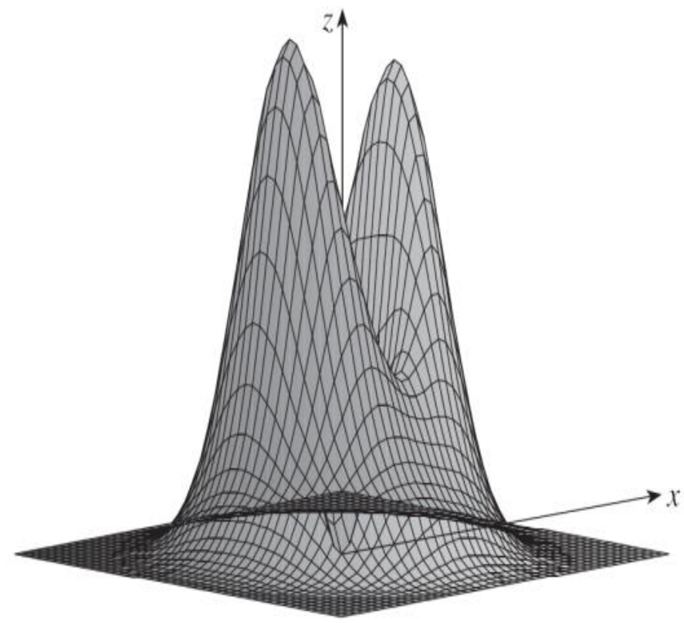
(c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

Observe que obtemos uma visão melhor da função quando a giramos de modo a observá-la por diferentes pontos de vista.



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

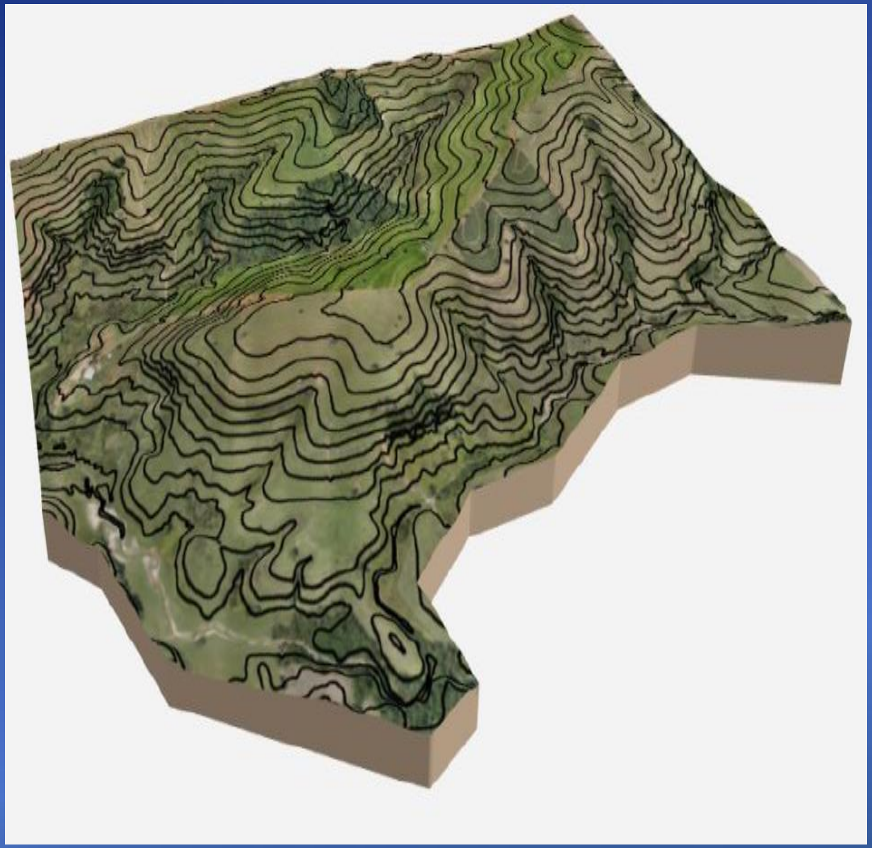
4- CURVAS DE NÍVEL

Até aqui vimos dois métodos diferentes para visualizar funções: o diagrama de setas e os gráficos.

- **Um terceiro método, decorrente dos cartógrafos, é correspondente a um mapa de contorno, em que os pontos com elevações constantes são ligados para formar *curvas de contorno* ou *curvas de nível.***

4- CURVAS DE NÍVEL

Exemplos de cartografia de relevo

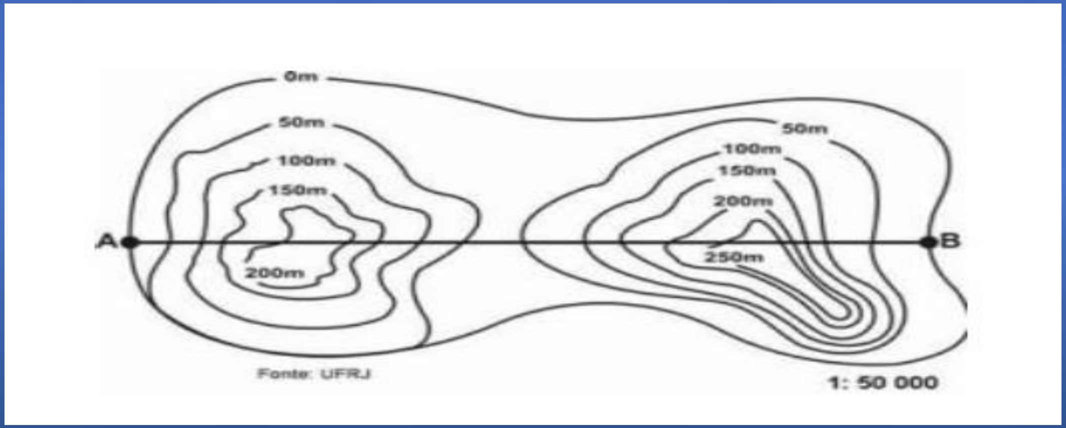


As curvas de nível de uma função f de duas variáveis são aquelas com a seguinte equação:

$$f(x, y) = k$$

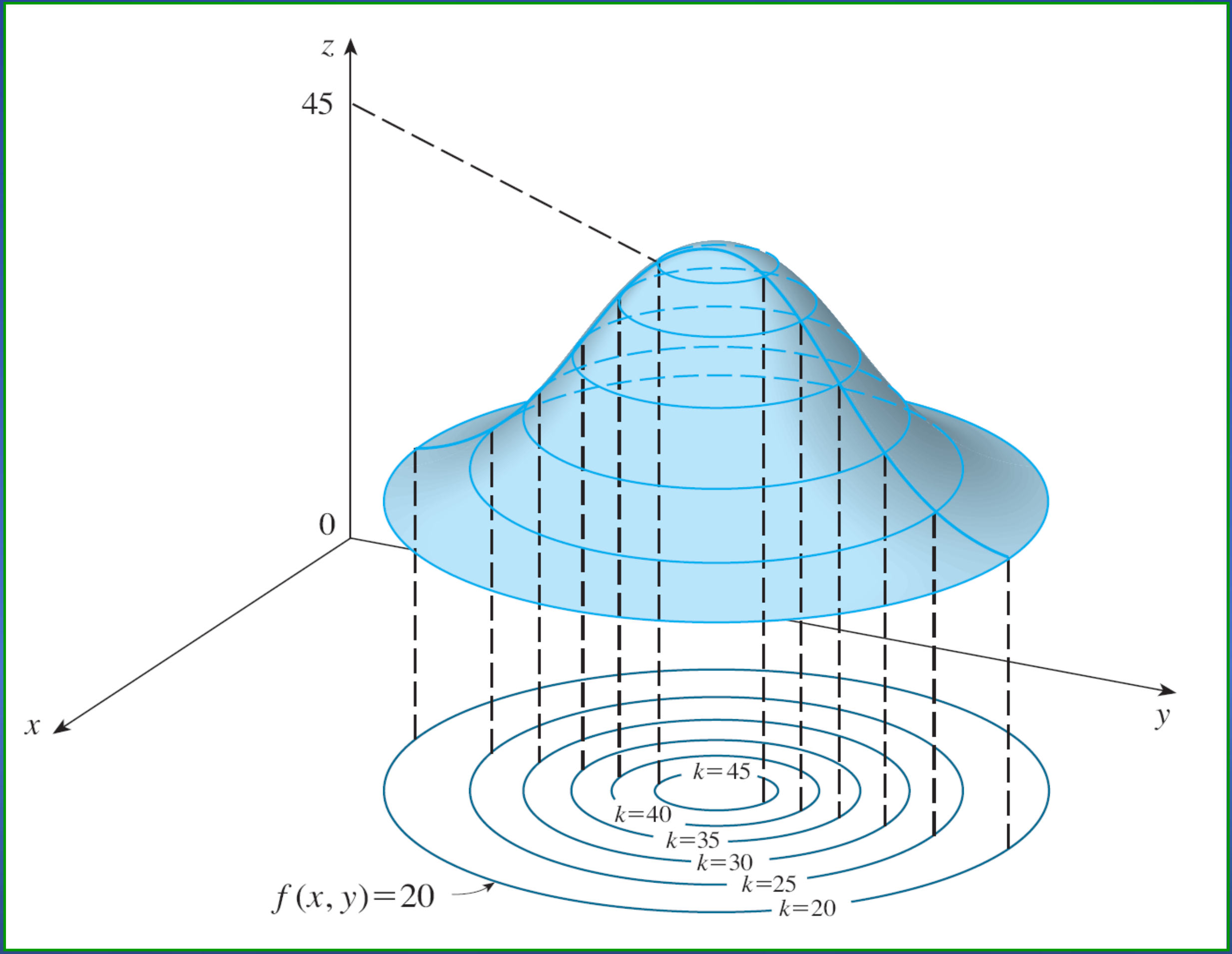
onde k é uma constante (na imagem de f)

Uma curva de nível $f(x, y) = k$ é o conjunto de todos os pontos do domínio de f nos quais o valor de f é k. Em outras palavras, ela mostra onde o gráfico de f tem altura k.

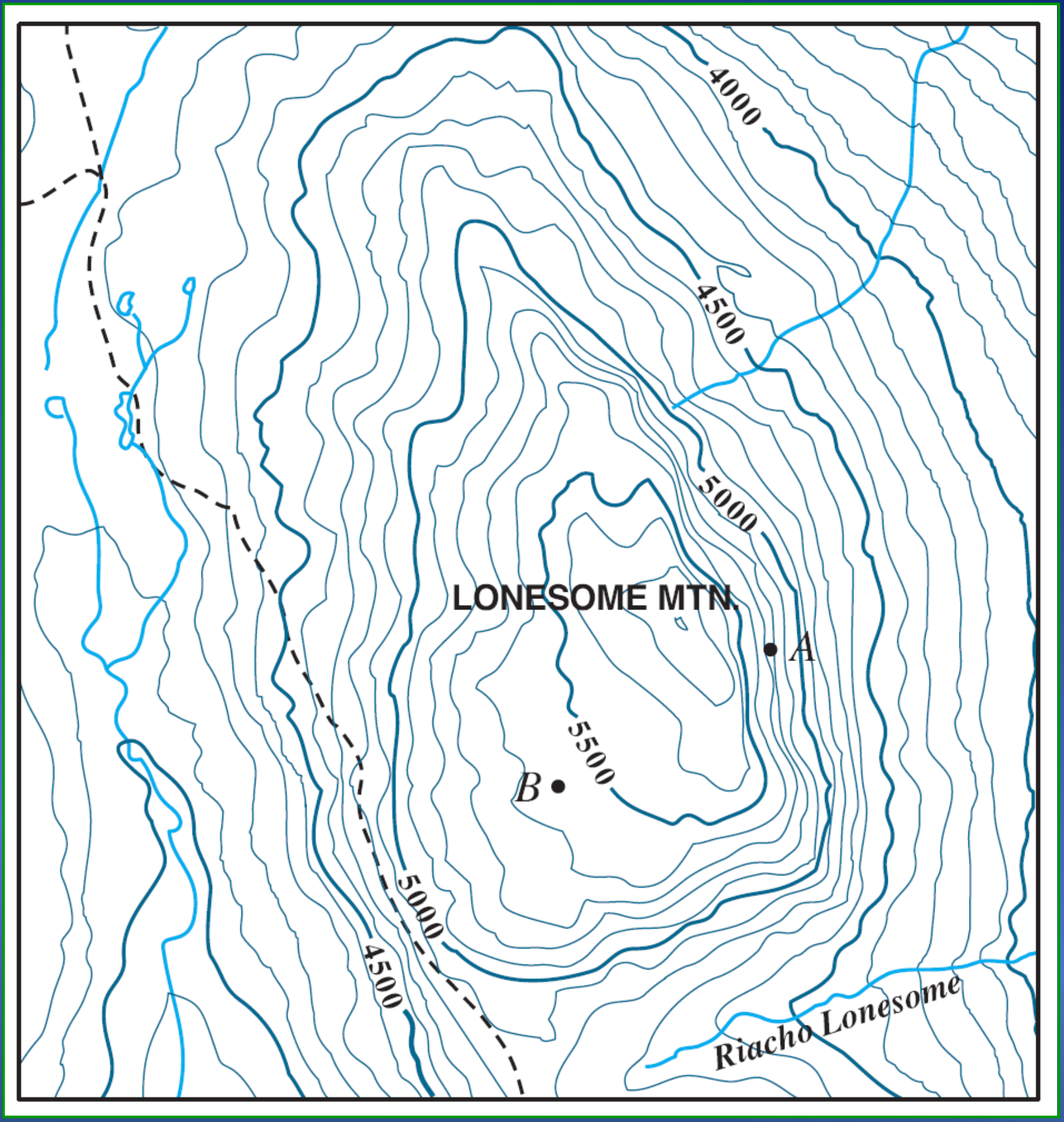


Exemplo de uma curva de nível

Através da figura podemos ver a relação entre as curvas de nível e os cortes horizontais.



Outro exemplo de curvas de nível que ocorre em mapas topográficos de regiões montanhosas

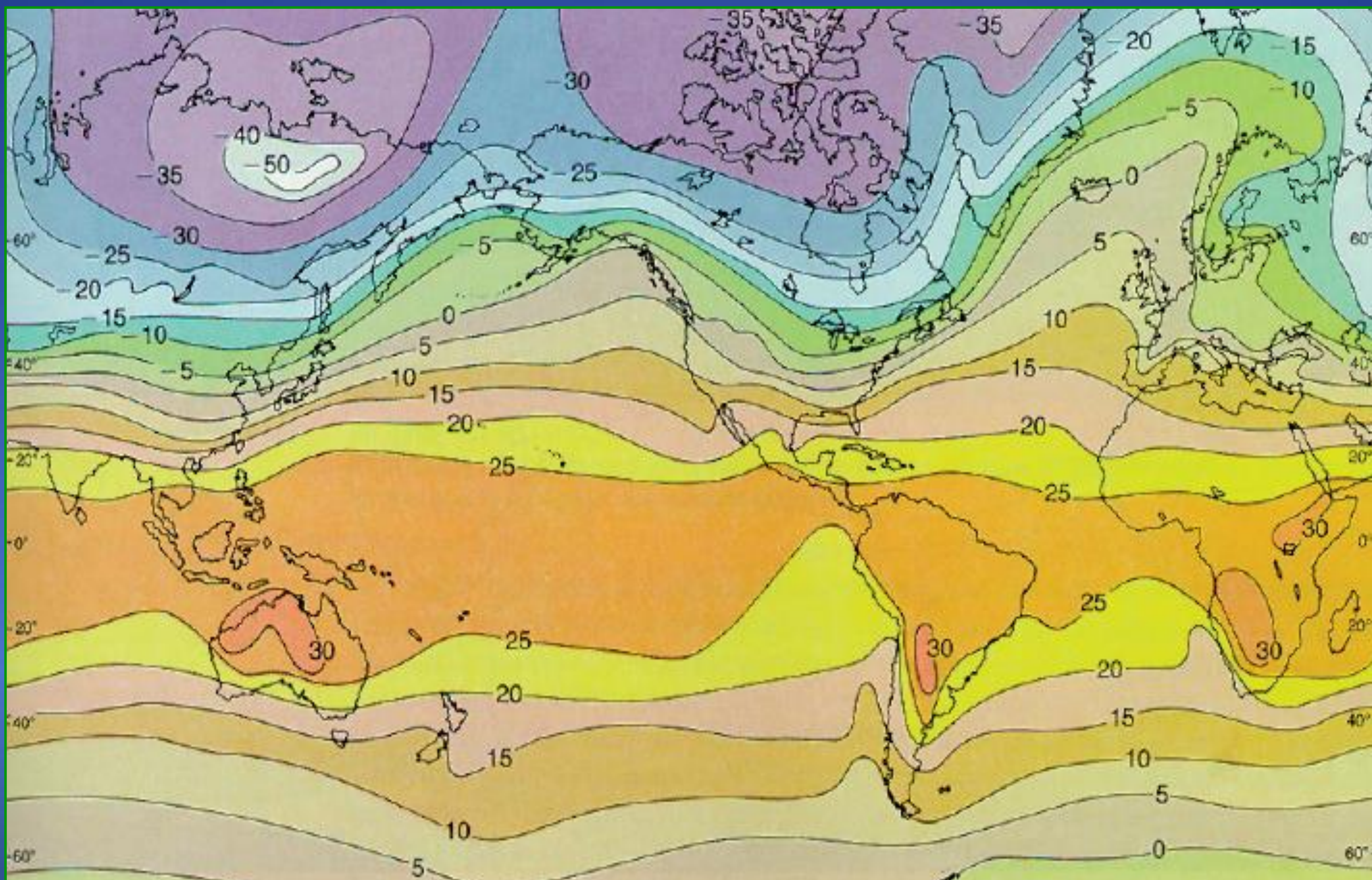


As curvas de nível são aquelas em que a elevação em relação ao nível do mar é constante. Se você andar sobre um desses contornos, nem descerá nem subirá.

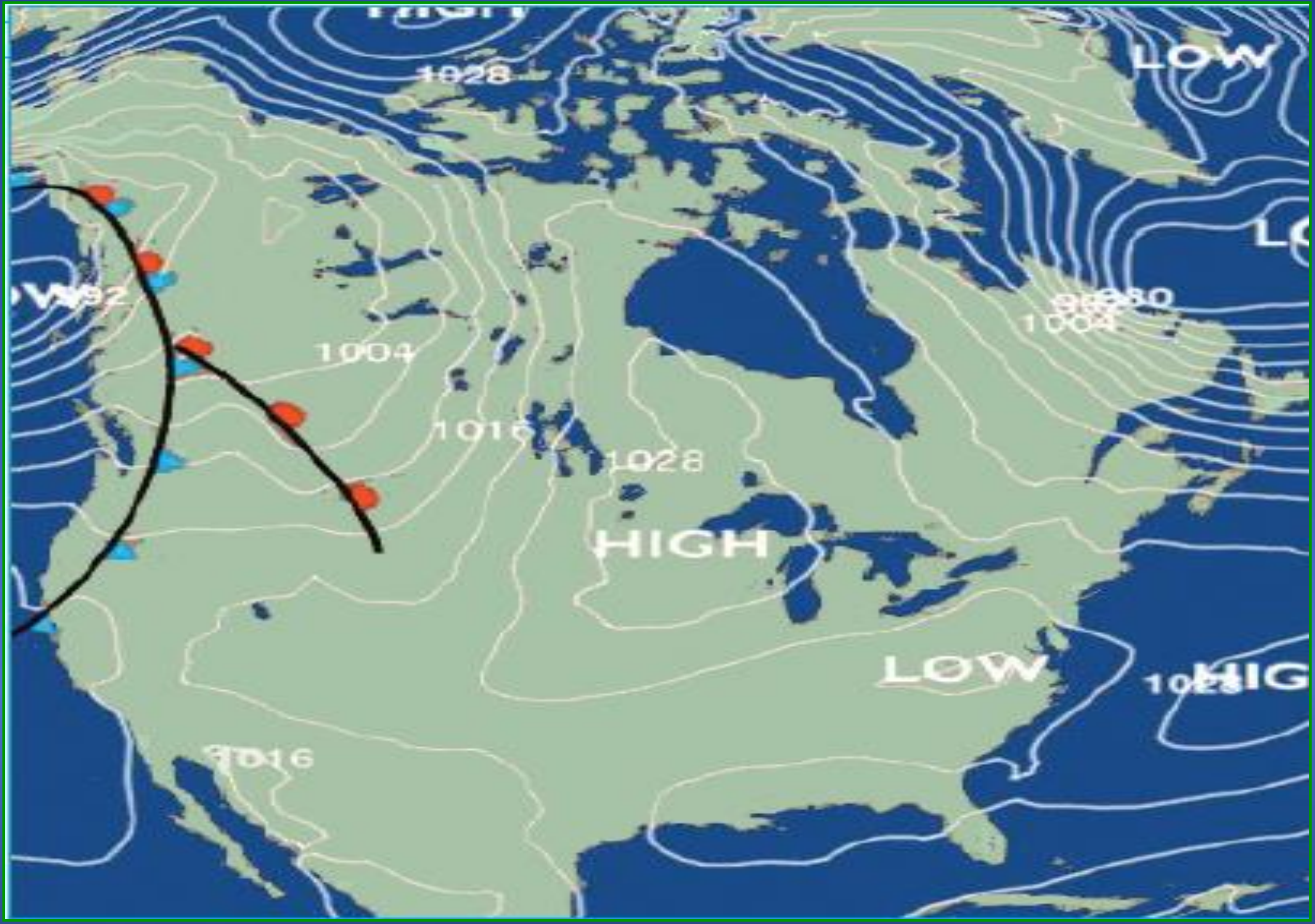
Outro exemplo comum é a função temperatura apresentada no início desta seção.

- Aqui as curvas de nível são chamadas **curvas isotérmicas.**
- Elas ligam localidades que têm a mesma temperatura.

A Figura apresenta um mapa de clima, indicando as temperaturas médias do mês de janeiro.



As isobáricas no mapa de pressão atmosférica, elucidam outro exemplo de curvas de nível



EXEMPLO 6:

O ponto (1, 3) está na parte entre as curvas de nível cujos valores de *z* são 70 e 80.

Estimamos que

$$f(1, 3) \approx 73$$

Da mesma forma,

estimamos que

$$f(4, 5) \approx 56$$