

Controle H_∞ - Aula 4

Prof. Diego Colón

6 de outubro de 2020

Revisão Aula Anterior 1

- O erro teórico é $E = -SR + SG_dD - TN$, ou seja, a função sensibilidade S relaciona o erro com referência e com distúrbio.
- A estratégia adotada em controle H_∞ consiste em impôr um limite superior para $|S(j\omega)|$ em cada frequência, da forma:

$$|S(j\omega)| < 1/|W_p(j\omega)|, \quad (1)$$

onde $W_p(j\omega)$ é estável e tem uma característica passa-baixas.

- Esta função $W_p(j\omega)$ é conhecida como *função peso de desempenho*.
- Se passarmos multiplicando a função peso em (1), teremos:

$$|S(j\omega)||W_p(j\omega)| = |S(j\omega)W_p(j\omega)| < 1 \quad (2)$$

Revisão Aula Anterior 2

- A condição (2) seria automaticamente atendida se $\|SW_p\|_\infty < 1$.
- Buscamos então solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s)} \|SW_p\|_\infty \quad (3)$$

onde $K(s) \in \mathcal{CE}_G$.

- Se o algoritmo retornasse um controlador $K(s)$ tal que $\|SW_p\|_\infty < 1$, ou próximo disso, estaríamos satisfeitos, pois assim as especificações estariam garantidas.
- Achar um controlador $K^*(s)$ que resolva o problema de otimização em (3) é uma tarefa computacionalmente muito complicada.

Revisão Aula Anterior 3

- Entretanto, uma *solução subótima* é mais que suficiente para os nossos objetivos.
- Se γ_{\min} é o mínimo atingido pela função $\|SW_p\|_{\infty}$, para qualquer valor $\gamma > \gamma_{\min}$ temos uma solução subótima.
- Pode-se mostrar, em uma solução subótima, que:

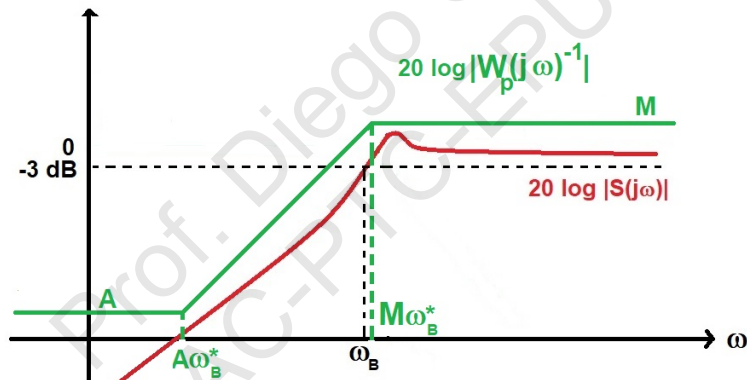
$$|S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_p(j\omega)|}$$

de modo que se acharmos um $K(s)$ tal que $\gamma \simeq 1$, as especificações estariam parcialmente atendidas.

- Precisamos de um algoritmo que forneça uma solução subótima para o problema, e não necessariamente a ótima.
- Existe um algoritmo, a ser apresentado mais adiante, que fornece sucessivas soluções subótimas que vão aproximando de γ_{\min} e que teoricamente convergiria para ele.

Revisão Aula Anterior 4

Para que as especificações de desempenho sejam atingidas no projeto ótimo H_∞ , é necessário que, ao final, $|S(j\omega)|$ esteja abaixo de $|W_p^{-1}(j\omega)|$, como está representado em:



Revisão Aula Anterior 5

- Isto é equivalente a dizer que foi achado um controlador $K^*(s)$ tal que $\|W_p S^*\|_\infty < 1$.
- A função peso acima é chamada de primeira ordem, pois possui apenas um pólo e um zero. Note que na figura está representada a inversa (na verdade, as suas assíntotas).
- Esta função tem a expressão matemática dada por:

$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B^*}{s + A\omega_B^*}$$

Revisão Aula Anterior 6

- Para baixas frequências, o ganho de $W_p(s)^{-1}$ é A . Portanto, quanto menor fizermos este parâmetro, menor queremos $|S(j0)|$, e portanto, menor o erro estacionário.
- Para altas frequências, o ganho de $W_p(s)^{-1}$ é aproximadamente M . Quanto menor fizermos este valor, menor queremos $\|S\|_\infty$, o implica em sistema menos oscilatório (e maior robustez de estabilidade).
- Valores pequenos de $\|S\|_\infty$ (próximos ou abaixo de 1) podem não ser viáveis por restrições de desempenho.
- Para médias frequências, ω_B vai tender a estar entre $A\omega_B^*$ e $M\omega_B^*$ se as especificações forem atendidas, de modo que quanto maior ω_B^* , maior tende a ser ω_B .

Revisão Aula Anterior 7

- Podemos levar em conta no projeto o esforço de controle.
- O sinal de controle no sistema em malha fechada é dado por $U = KS(R - G_d D - N)$
- Se queremos que o esforço de controle seja pequeno devemos também ponderar a função de transferência $K(s)S(s)$.
- Adota-se a mesma técnica da função peso de modo que:

$$|K(j\omega)S(j\omega)| < \frac{1}{|W_u(j\omega)|}$$

e se $\|KSW_u\|_\infty < 1$, teremos a condição anterior atendida.

Revisão Aula Anterior 8

- Se queremos que o sinal de controle tenha pouca energia nas altas frequências, fazemos com que $|W_u(j\omega)|$ seja alto nestas frequências, e vice-versa.
- Deste modo, a restrição $\|W_uKS\|_\infty < 1$ deve ser juntada ao problema de otimização original.
- Mostra-se que podemos incluir esta restrição no funcional a ser minimizado da seguinte forma: Seja a matriz de funções de transferência:

$$N(j\omega) = \begin{bmatrix} W_pS \\ W_uKS \end{bmatrix}, \quad (4)$$

- Para matrizes deste tipo, tem-se que:

$$\|N\|_{\infty} = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{|W_p(j\omega)S(j\omega)|^2 + |W_u(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)|^2}, \quad (5)$$

- Se garantirmos que $\|N\|_{\infty} < 1$, teremos as especificações satisfeitas, bem como limitação do esforço de controle.
- Como estamos buscando soluções subótimas, tal que $\|N\|_{\infty} < \gamma$, e quanto mais próximo γ for do valor um, melhor.
- Neste caso, teremos:

$$|S(j\omega)| < \gamma/|W_p(\omega))| \quad , \quad |KS(j\omega)| < \gamma/|W_u(\omega))|$$

Exemplo de Projeto 1

Neste exemplo, iremos resolver com mais detalhes o problema 2.17 do livro do Skogestad, segunda edição, versão 2005 (pag. 64). Deseja-se resolver o problema de sensibilidade mista S/KS , onde se dá um formato adequado para a função sensibilidade S , assim como na função de transferência KS do sinal de controle. Iremos usar a função **mixsyn** do Matlab Robust Control Toolbox[®]. Seja a planta dada pela função de transferência

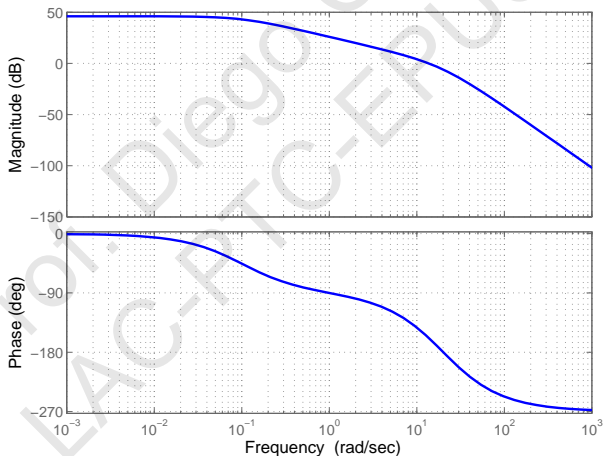
$$G(s) = \frac{200}{0.025s^3 + 1.002s^2 + 10.1s + 1}$$

que é uma planta de terceira ordem e de fase mínima.

Exemplo de Projeto 2

Os correspondentes diagramas de Bode são apresentados na figura abaixo.

Diagramas de Bode de $G(s)$



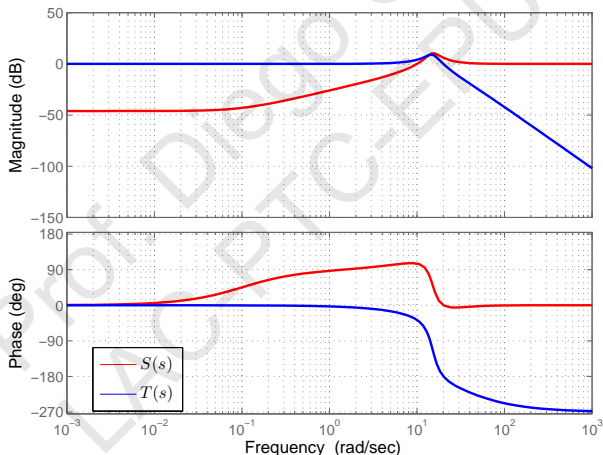
Exemplo de Projeto 3

- Supondo realimentação unitária e controlador unitário, ou seja $K(s) = 1$, nota-se que: $\omega_{180} = 20.1 \text{ rad/s}$, $\text{GM} = 6.11 \text{ dB}$, $\omega_c = 13.6 \text{ rad/s}$ e $\text{PM} = 21.8 \text{ graus}$.
- Como não estamos considerando modelo de incertezas na planta, vamos usar as especificações clássicas de robustez de estabilidade, que recomendam $30 < \text{PM} < 60 \text{ graus}$ e $\text{GM} > 6 \text{ dB}$.
- As funções de transferência em malha fechada $S(s)$ e $T(s)$ são apresentadas na figura a seguir.

Exemplo de Projeto 4

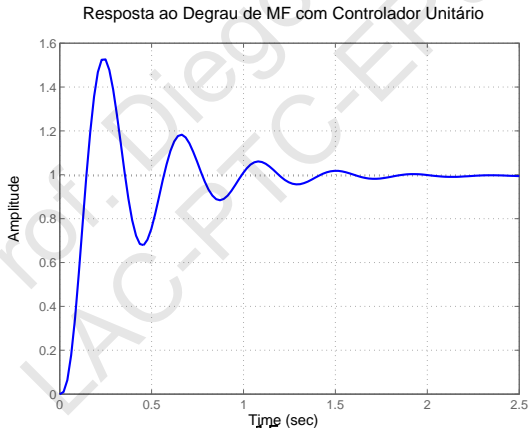
$\|S\|_{\infty} = 10.2$ dB, acima do valor recomendado classicamente de 6 dB e $\|T\|_{\infty} = 9.02$ dB, que deve ser no máximo 2 dB.

Diagrama de $S(s)$ e $T(s)$ com Controlador Unitário



Exemplo de Projeto 5

- A banda passante de $S(s)$ é $\omega_B = 8.65 \text{ rad/s}$, e a resposta ao degrau é apresentada na figura a seguir.
- Espera-se que uma diminuição do valor de $\|S\|_\infty$ vá diminuir a porcentagem de sobressinal (que está acima de 50%).



Exemplo de Projeto 6

- Vamos inicialmente propor a função peso $W_p(s)$ pcomo no exemplo do Skogestad, onde $A = 0.0001$, $M = 1.5$ e $\omega_B^* = 10$.

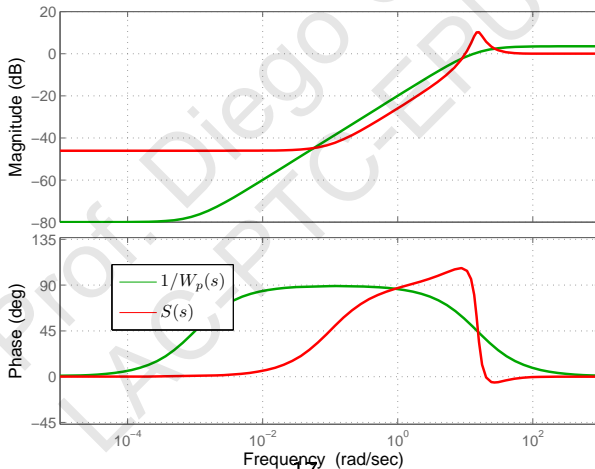
$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b^*}{s + A\omega_B^*}$$

- O novo valor em baixas frequências de $|S|$ ficará $20 \log A = -80$ dB e o máximo valor ficará abaixo $20 \log M = 3.52$ dB.
- Estas especificações implicam que a banda passante será um pouco maior que a do sistema original (com controle unitário),
- um erro estacionário menor e $\|S\|_\infty$ limitado superiormente por 3.52 dB.
- Além disso, vamos especificar que $W_u \equiv 1$, o que vai limitar superiormente a função $|KS(j\omega)|$ em γ .

Exemplo de Projeto 7

Os diagramas de Bode da função sensibilidade original e da função peso com as especificações são apresentados na figura abaixo.

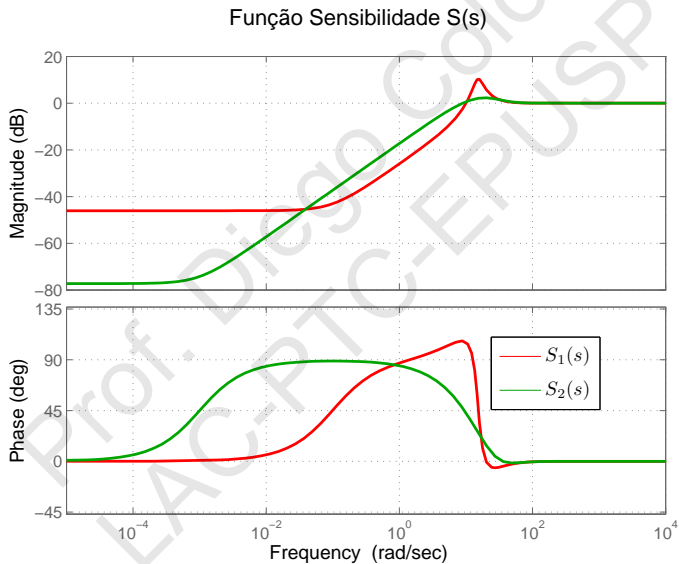
Diagrama de Bode de $S(s)$ e Função Peso Inversa



Exemplo de Projeto 8

- Após aplicar o algoritmo, o valor atingido é $\gamma = 1.37$, de modo que as especificações não vão ser exatamente atingidas
- O valor $\|S\|_{\infty}$ ficou 2.29 dB, como pode ser verificado na figura.
- A banda passante ficou $\omega_B = 5.74$ rad/s, o que é inferior ao que era anteriormente (o que vem do fato de γ maior que um).
- A margem de ganho resultou em 27.8 dB, com $\omega_{180} = 35.4$ rad/s e a margem de fase resultou em 71.1 graus com $\omega_c = 7.2$ rad/s.

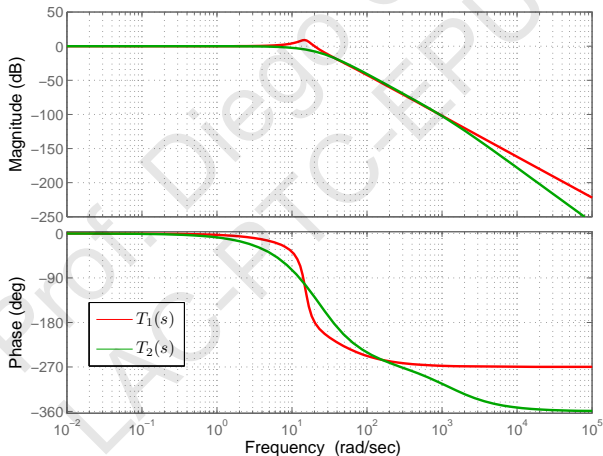
Exemplo de Projeto 9



Exemplo de Projeto 10

Na figura abaixo, tem-se os diagramas de Bode para para a função sensibilidade complementar.

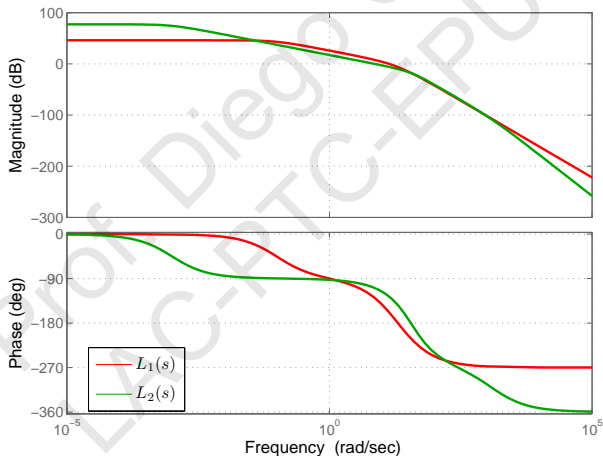
Função Sensibilidade Complementar $T(s)$



Exemplo de Projeto 11

Na figura abaixo, tem-se os diagramas de Bode para a função de transferência em malha aberta $L(s)$.

Função de Transferência de MA $L(s)$

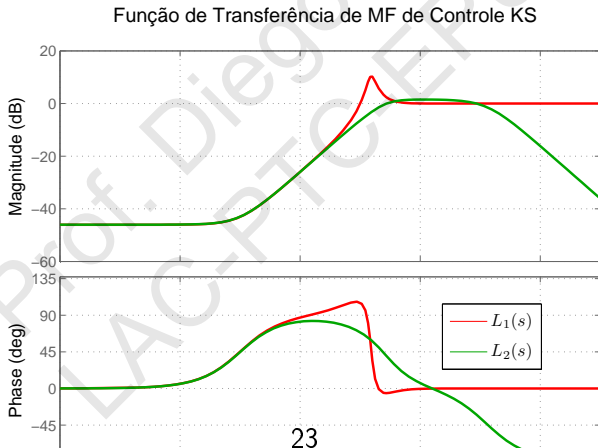


Exemplo de Projeto 12

- Nota-se que para atender a especificação de menor erro em regime estacionário, o ganho nas baixas frequências acabou sendo aumentado.
- Desta e das figuras anteriores, também se vê que o controlador tem um excesso de pólos igual a um, de modo que não se trata de nenhum controlador clássico.

Exemplo de Projeto 13

Na figura abaixo, tem-se os diagramas de Bode para função de transferência KS . Nota-se que o limite superior de $\gamma = 1.37$, que representa um ganho de 2.73 dB foi respeitado, entretanto as especificações não foram atendidas exatamente.



Exemplo de Projeto 14

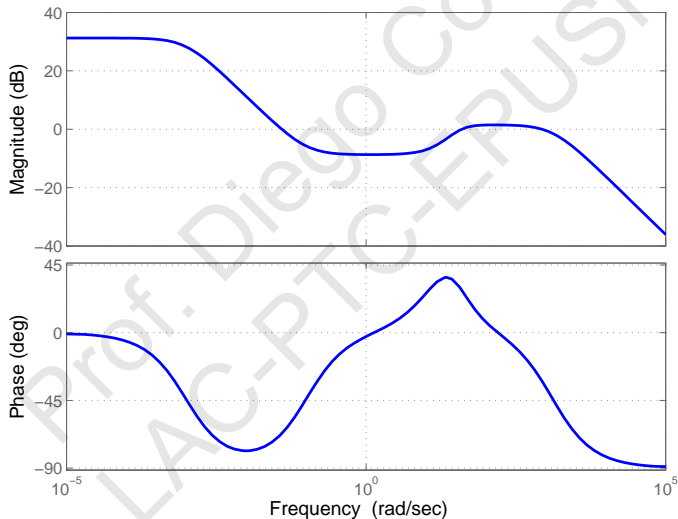
- O Controlador projetado tem a função de transferência na equação abaixo:

$$K(s) = \frac{1569.4523(s + 20)^2(s + 0.1)}{(s + 1311)(s + 0.001)(s^2 + 58.96s + 1313)} \quad (6)$$

- Nota-se que o controlador tem ganho alto nas baixas frequências, e os diagramas de Bode são apresentados na figura a seguir.

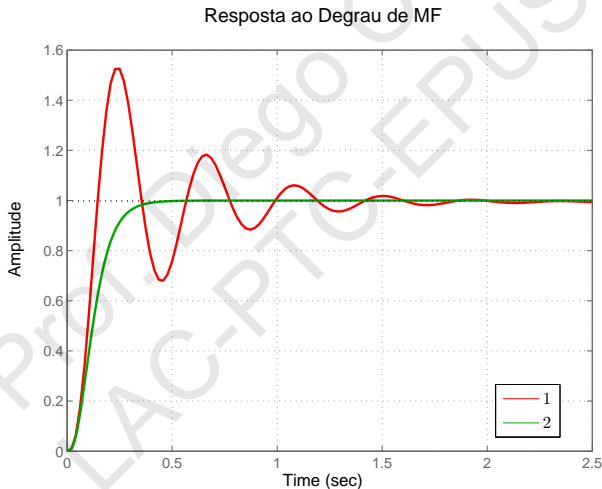
Exemplo de Projeto 15

Diagrama de Bode de $K(s)$ ótimo H Infinito



Exemplo de Projeto 16

Na figura a seguir, tem-se a resposta ao degrau para o sistema antigo e o sistema novo.

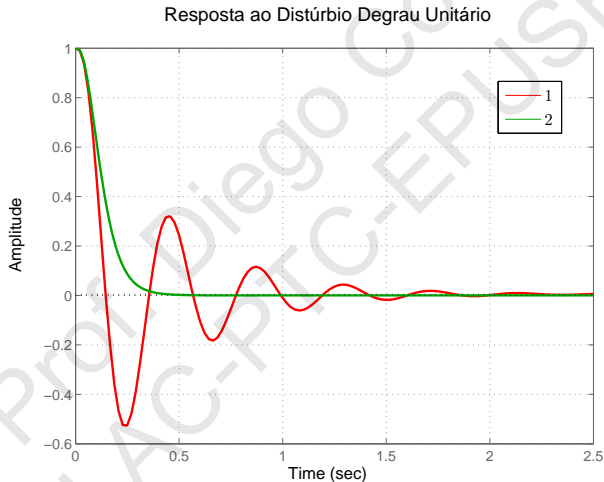


Exemplo de Projeto 17

- Nota-se que o sobressinal foi eliminado.
- Nota-se que o sistema ficou mais lento. Na figura a seguir, tem-se a resposta ao degrau de distúrbio na entrada $d(t)$.
- Nota-se que a influência é bastante reduzida, apesar de não se estar usando integrador no controlador. Porém o ganho deste é bastante alto nas baixas.

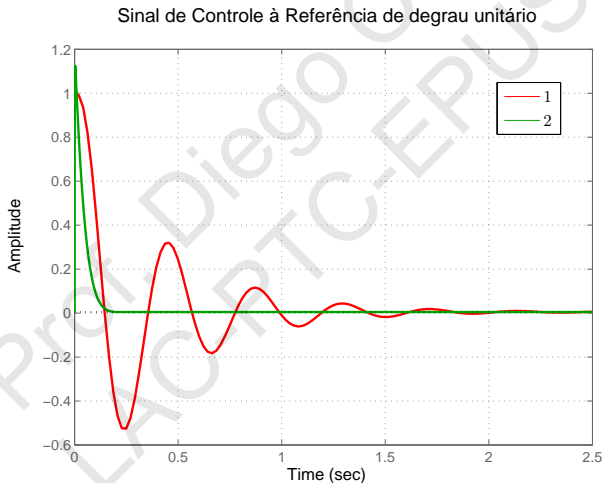
Exemplo de Projeto 18

Resposta ao distúrbio de degrau unitário:



Exemplo de Projeto 19

O sinal de controle para a referência ao degrau é apresentado na figura abaixo:



Outro Exemplo de Projeto 1

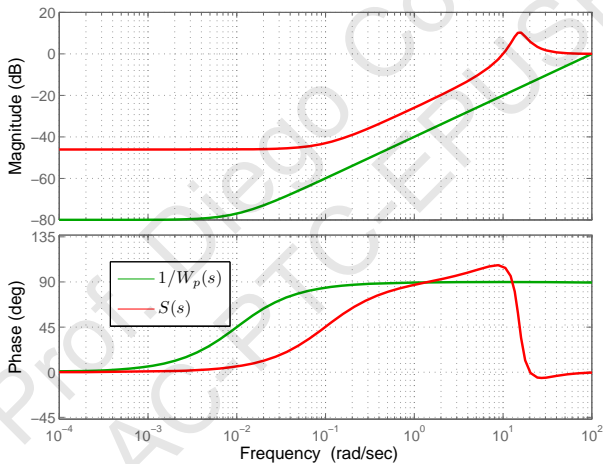
- Queremos agora uma banda passante próxima de $\omega_B^* = 100$, o que vai permitir uma resposta muito mais rápida do sistema.
- Mantendo-se então os outros parâmetros de projeto como estavam, o que se nota é que esta banda passante não é atingida, devido ao peso excessivo que se está dando na função KS nestas condições.
- Neste caso, o valor de γ resultou em 6.0730, o que mostra que as especificações ficaram longe de serem atendidas.
- Após se reduzir W_u para 0.001 e aumentar M para 3, obtivemos um projeto que tem a banda passante próxima do valor desejado.

Outro Exemplo de Projeto 2

- O peso do controle tinha que ser diminuído, já que uma mudança tão drástica na dinâmica do sistema exige um consumo de energia nas altas frequências bem maior do que os sistemas anteriores poderiam fornecer.
- Neste novo projeto, o valor de γ resultou em 1.0249, de modo que neste caso as especificações são bem próximas de serem atendidas.
- Na figura a seguir, tem-se a função sensibilidade anterior e a inversa da função peso $W_P(s)$, que guarda as especificações desejadas para o sistema em MF.

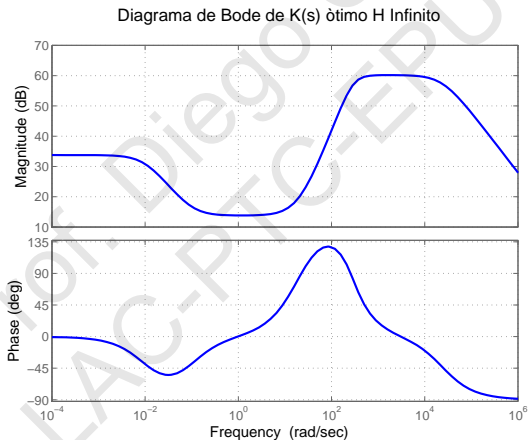
Outro Exemplo de Projeto 3

Diagrama de Bode de $S(s)$ e Função Peso Inversa



Outro Exemplo de Projeto 4

O diagrama de Bode do novo controlador é apresentado na figura abaixo. Nota-se que o controlador tem característica de avanço-atraso, porém há um pólo em excesso.



Outro Exemplo de Projeto 5

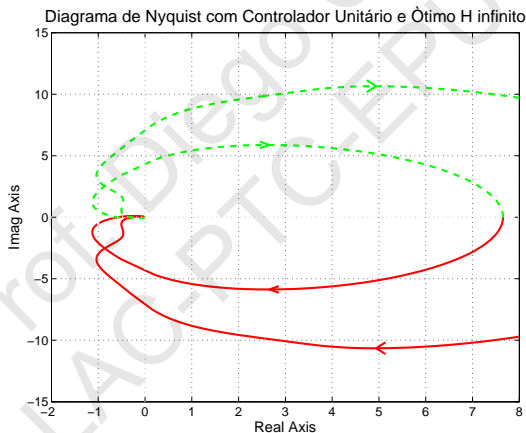
- A expressão do controlador é:

$$K(s) = \frac{25051261.7199(s + 20)^2(s + 0.1)}{(s + 24440)(s + 0.01)(s^2 + 421.5s + 8403)}$$

- Os diagramas de Nyquist logarítmicos de $L_1(s)$ e $L_2(s)$, ou seja, das funções de transferência em MA para o controlador unitário e controlador sub-ótimo H_∞ são exibidos na figura a seguir.

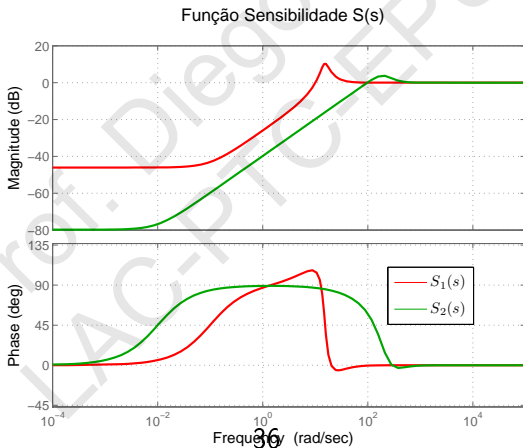
Outro Exemplo de Projeto 6

Nota-se que a estabilidade em MF existe em ambos os casos, porém o caso $L_2(s)$ tem maior robustez de estabilidade, pois a distância $|1 + L|$ é sempre maior neste caso.



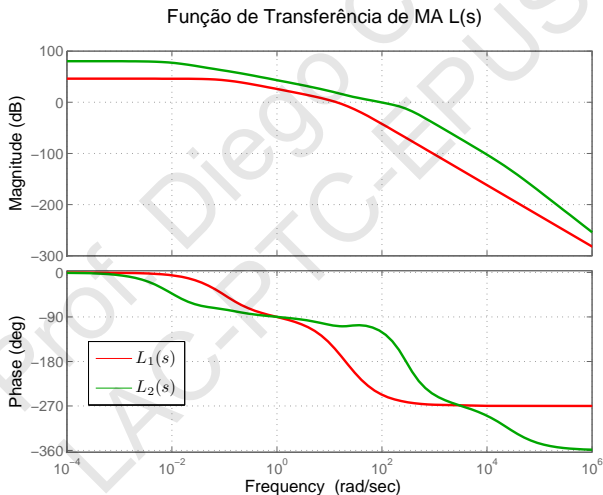
Outro Exemplo de Projeto 7

As funções sensibilidade $S_1(s)$ e $S_2(s)$ são apresentadas na figura a seguir. Neste caso, tem-se que $\|S\|_\infty = 3.52$ dB, o que atende as especificações clássicas. A banda passante fica em torno de $\omega_B = 70$ rad/s.



Outro Exemplo de Projeto 8

As funções de transferência em malha aberta são apresentadas na figura a seguir.



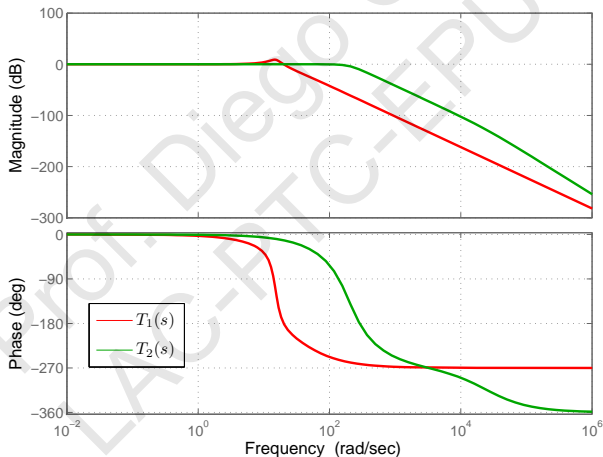
Outro Exemplo de Projeto 9

- Para a função de transferência $L_2(s)$ tem-se $\omega_{180} = 287 \text{ rad/s}$ e a correspondente margem de ganho é $GM = 12.5 \text{ dB}$.
- A correspondente margem de fase é $PM = 60.7 \text{ graus}$, na frequência de cruzamento de ganho $\omega_c = 95.2 \text{ rad/s}$, o que representa parâmetros clássicos mais interessantes.
- As funções sensibilidades complementares $T_1(s)$ e $T_2(s)$ são apresentadas na figura a seguir. No caso do controlador sub-ótimo H_∞ , tem-se que não há pico de ressonância em $T_1(s)$, e $\|T\|_\infty = 1 \text{ dB}$.

Outro Exemplo de Projeto 10

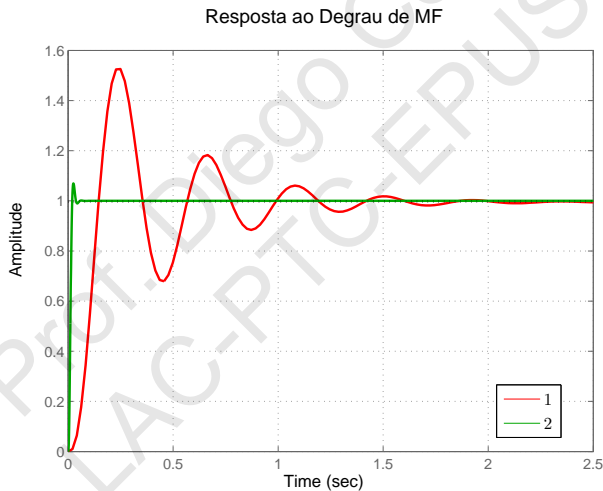
As funções sensibilidades complementares $T_1(s)$ e $T_2(s)$ são apresentadas na figura a seguir

Função Sensibilidade Complementar $T(s)$



Outro Exemplo de Projeto 11

A resposta ao degrau em Malha Fechada é apresentada na figura abaixo.



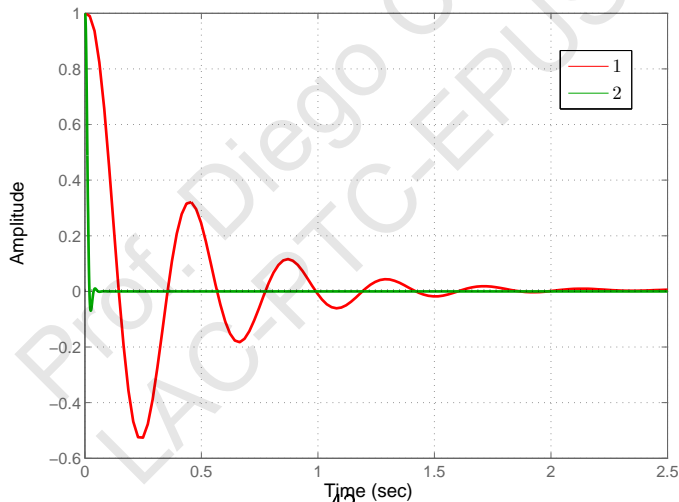
Outro Exemplo de Projeto 12

- Nota-se que para o sistema sub-ótimo H_∞ o sobressinal é bem reduzido, e o tempo de subida é bem menor que no caso de controlador unitário.
- Na figura a seguir, tem-se a resposta ao degrau de distúrbio $d(t)$ (lembre-se que $G_d(s) \equiv 1$). Nota-se que o distúrbio é mais rapidamente atenuado no caso ótimo do que no unitário.

Outro Exemplo de Projeto 13

Na figura a seguir, tem-se a resposta ao degrau de distúrbio $d(t)$:

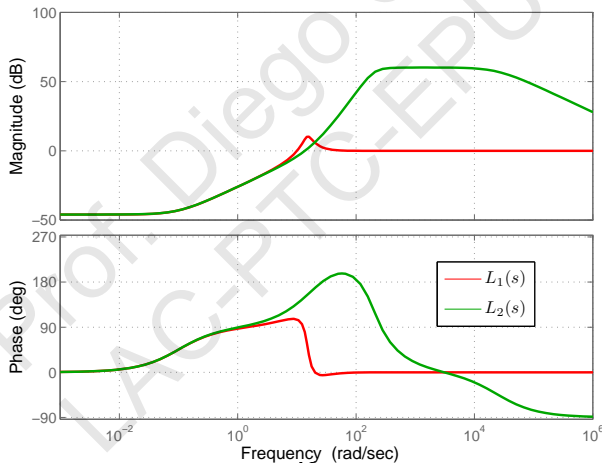
Resposta ao Distúrbio Degrau Unitário



Outro Exemplo de Projeto 14

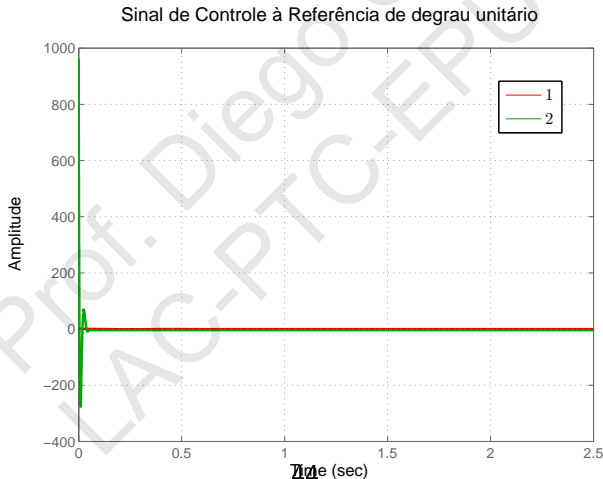
Na figura abaixo, tem-se o diagrama de Bode da função de transferência $K(s)S(s)$ na figura abaixo.

Função de Transferência de MF de Controle KS



Outro Exemplo de Projeto 15

Nota-se que o ganho é maior nas faixas de frequência entre 100 rad/s e 500 rad/s, que é necessário para se gerar o sinal de controle mostrado na figura abaixo:



Outro Exemplo de Projeto 16

que mostra o sinal de controle para o degrau nos dois casos.

Nota-se que a amplitude do sinal de controle ficou muito grande no caso sub-ótimo, o que não é interessante. O valor de $\gamma = 1.0249$.

Restrições de Desempenho 1

- Valor alto de $\|S\|_\infty$ indica baixa robustez mas também baixo desempenho, pois isto indica que $\|T\|_\infty$ também é alto.
- Infelizmente, não é possível eliminar o pico de S na maioria dos problemas práticos.
- De fato, se $n - m \geq 2$, temos que o gráfico de Nyquist de $L(j\omega)$ entra no círculo unitário ao redor de -1 , ou seja, $|1 + L| < 1$, o que implica que $\|S\|_\infty > 1$.
- Além disso, exceto pelo caso onde $n - m = 0$, tem-se que $|1 + L| \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow \infty$, o que implica que $|S(j\omega)| \rightarrow 1$.
- Além disso, existem outros resultados que vinculam fortemente o comportamento da função S quando o sistema é de fase não-mínima e/ou instável.

Restrições de Desempenho 2

Teorema (Integral de Sensibilidade de Bode, ou Primeiro Teorema do "Colchão de Água")

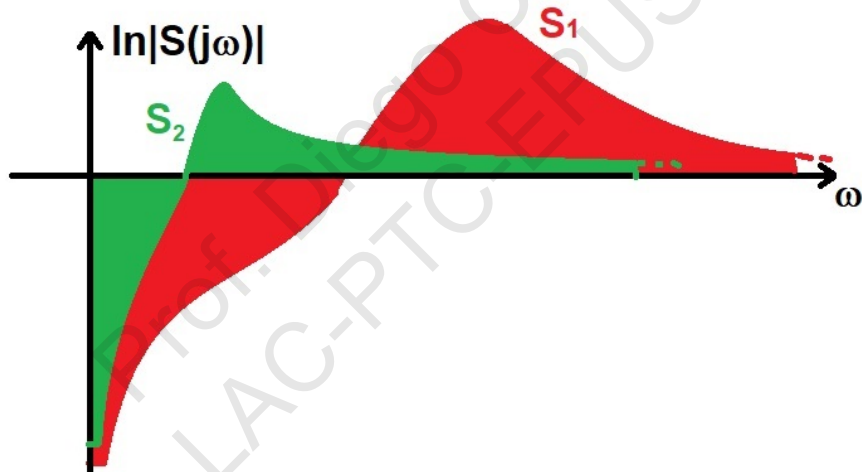
Seja $L(s)$ racional e $n - m \geq 2$. Suponha ainda que $L(s)$ tem N_p pólos no semi-plano direito (SPD) nas posições p_i , onde $i = 1, \dots, N_p$. Então, vale que:

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \Re(p_i)$$

Para entender todas as implicações deste teorema, é necessário analisar alguns casos possíveis.

Restrições de Desempenho 3

Na figura abaixo, tem-se o gráfico de duas funções $\ln |S_1(j\omega)|$ e $\ln |S_2(j\omega)|$ (a escala no eixo das frequências é linear).



Restrições de Desempenho 3

- Suponha que nenhuma das funções tem pólos no semiplano direito, o que significa que as áreas acima e abaixo do eixo real devem ser iguais.
- Para S_1 temos que a banda-passante é maior do que no caso S_2 , o que implica que a área negativa deve ser maior na primeira do que na segunda.
- Isto implica que a área positiva também deve ser maior na primeira do que na segunda. Deste modo, o pico de ressonância tende a ser maior também no caso da primeira.

Restrições de Desempenho 4

- Se L possui um polo real no semi-plano direito (por exemplo, p), então a integral fica:

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi p > 0$$

- Isso indica que o resultado da integral deve ser positivo, ou seja, o pico de S tende a ser maior ainda.
- Neste caso, atingir bom desempenho e boa robustez de estabilidade é ainda mais difícil do que no caso onde L é estável (por exemplo, no caso da planta ser de fase mínima).
- Além disso, quanto mais distante este polo do SPD estiver do eixo imaginário, maior tenderá a ser $\|S\|_{\infty}$.

Restrições de Desempenho 5

De tudo isso, podemos concluir que:

- Querer menor erro estacionário tende a aumentar $\|S\|_{\infty}$;
- Querer maior banda-passante (fidelidade) tende a aumentar $\|S\|_{\infty}$;
- Estabilizar uma planta instável tende a aumentar $\|S\|_{\infty}$ e todos os efeitos anteriores se acumulam com este;
- Querer boa robustez de estabilidade exige sacrifício de desempenho nominal.

Restrições de Desempenho 6

Teorema (Segundo Teorema do "Colchão de Água")

Seja $L(s)$ tenha um zero real z ou dois zeros complexos conjugados $z, z^* = x \pm jy$ no SPD e ainda tenha N_p pólos no semi-plano direito (SPD) nas posições p_i , onde $i = 1, \dots, N_p$. Então, vale que:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \left(\prod_{i=1}^{N_p} \left| \frac{p_i + z}{p_i^* - z} \right| \right)$$

onde:

- Se z é real, então $w(z, \omega) = \frac{2z}{z^2 + \omega^2}$
- Se z, z^* é um par complexo conjugado, então:

$$w(z, \omega) = \frac{x}{x^2 + (y - \omega)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + \omega)^2}$$

Restrições de Desempenho 7

- Para compreender as implicações deste teorema, vamos supor inicialmente que não há pólos no SPD e que z é real e tende para infinito (ou seja, $z \rightarrow \infty$).
- Neste caso, a função $w(z, \omega)$ se aproxima de uma constante com valor bem pequeno (mas positivo) $\epsilon > 0$. Então:

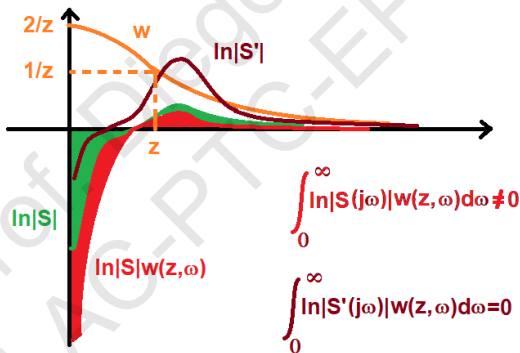
$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| w(z, \omega) d\omega \cong \epsilon \int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$

de modo que recuperamos a situação do primeiro teorema.

- À medida que z fica menor e se aproxima da origem pela direita, pesos maiores são dados para a faixa de área negativa do que a de área positiva.

Restrições de Desempenho 8

Para que a integral seja zero, é necessário que S tenha valores ainda maiores para a faixa de área positiva da integral. Quanto mais próximo o zero no SPD for do eixo imaginário, pior para a robustez de estabilidade, vide figura abaixo.



Restrições de Desempenho 9

- Se há pólo p no SPD (além do zero, suposto aqui real z), tem-se que o teorema se reduz a:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \left| \frac{p+z}{p-z} \right|$$

o que significa dizer que, além de $|S(j\omega)|$ precisar ser maior no caso de haver z no SPD na faixa de area positiva (do que no caso de não haver), com a presença do polo, $|S(j\omega)|$ precisa ser maior ainda nesta faixa.

- O caso extremo ocorre quando p está proximo de z , o que faz o lado direito da equação ficar muito grande (tentendo ao infinito quando o pólo cancela com o zero no SPD).

Restrições de Desempenho 10

Em suma:

- Para sistemas de fase não-mínima, é mais difícil conseguir robustez e bom desempenho, e quando mais próximo o zero $z > 0$ estiver do eixo imaginário, mais difícil é;
- Sistemas instáveis e com zero no SPD são ainda piores de se conseguir robustez de estabilidade e bom desempenho;
- Sendo a planta instável ou não, não se recomenda usar um controlador de fase não-mínima, pois tende a ser pior em termos de desempenho e robustez de estabilidade.
- Se planta tiver pólo e zero no SPD (ou seja, nenhum deles pode ser removido), quanto mais próximos eles forem, pior tende a ser o desempenho e a robustez de estabilidade, sendo que no caso limite, nos aproximamos da situação de perda de estabilizabilidade.

Restrições de Desempenho 11

A seguir, apresentam-se limites mínimos para a função sensibilidade S e a sensibilidade complementar T .

- Se $W(s)$ é uma função peso, tem-se que se z é um zero no SPD da planta $G(s)$, então:

$$\|WS\|_{\infty} \geq |W(z)| \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|p_i + z|}{|z - p_i|}$$

onde N_p é o número de pólos no SPD.

- Se $W(s)$ é uma função peso, tem-se que se p é um polo no SPD da planta $G(s)$, então:

$$\|WT\|_{\infty} \geq |W(p)| \prod_{i=1}^{N_z} \frac{|p + z_i|}{|z_i - p|} |e^{p\theta}|$$

onde N_z é o número de zeros no SPD e θ é um atraso de transporte.

Restrições de Desempenho 12

Exemplo: Se uma planta $G(s)$ é tal que:

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{s - 3}$$

considerando $W(s) \equiv 1$, e como $p = 3$ e $\theta = 0.5$, então tem-se:

$$\|T\|_{\infty} \geq e^{1,5} = 4.48$$

o que implica que $\|S\|_{\infty} = \|T\|_{\infty} - 1 = 3.48$. Isto indica que, para esta planta, que é instável, não há como ter menos pico de ressonância do que 3.48.

Exemplo: Se uma planta $G(s)$ é tal que:

$$G(s) = 10 \frac{s - 2}{s^2 - 2s + 5}$$

como $z = 2$ e $p = 1 \pm j2$, tem-se que:

$$\|S\|_{\infty} \geq \frac{|2 + (1 + j2)|}{|2 - (1 + j2)|} \frac{|2 + (1 - j2)|}{|2 - (1 - j2)|} = \frac{3^2 + 2^2}{1^2 + 2^2} = 2.6$$