EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II:
Diferencial de uma função

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

A2W

Agenda

1. Diferencial ou Derivada Total

Agenda

1. Diferencial ou Derivada Total

Referência:

Cap 10:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1. Diferencial de uma função (ou derivada total)

- Seja a **f(x,y) = 5$x^2 + 3y^2$**, qual será a variação em z (Δz) se x e y variarem ao mesmo tempo?

Ou: qual o impacto em z dados Δx e Δy ao mesmo tempo?

- Seja (x_0, y_0), o ponto inicial. Por definição, Δz é dado como:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

- $f(x_0, y_0) = 5(x_0)^2 + 3(y_0)^2$

- $f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = 5(x_0 + \Delta x)^2 + 3(y_0 + \Delta y)^2 = 5\,[(x_0)^2 + 2\,x_0\Delta x + (\Delta x)^2] + 3\,[(y_0)^2 + 2\,y_0\Delta y + (\Delta y)^2]$

- $\Delta z = 5\,(x_0)^2 + 10\,x_0\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 3\,(y_0)^2 + 6\,y_0\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 5(x_0)^2 - 3(y_0)^2$

- $\Delta z = 10\,x_0\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 6\,y_0\Delta y + 3(\Delta y)^2$

1. Diferencial de uma função (ou derivada total) *continuação*

- Supondo $(x_0, y_0) = (2,\ 3)$ e $\Delta x = \Delta y = 0{,}1$, tem-se:

- $\Delta z = 10\, x_0 \Delta x + 5(\Delta x)^2 + 6\, y_0 \Delta y + 3(\Delta y)^2$
- $\Delta z = 10\,(2)(0,1) + 5(0,1)^2 + 6\,(3)(0,1) + 3(0,1)^2$
- $\Delta z = 2 + 0{,}05 + 1{,}8 + 0{,}03$
- $\Delta z = 3{,}8 + 0{,}08 = 3{,}88$

muito pequeno, desde que $\Delta x = \Delta y$ sejam próximos de zero.

1. Diferencial de uma função (ou derivada total) *continuação*

- Dessa forma, Seja (x_0, y_0), $\mathbf{\Delta z}$ pode ser obtido, **aproximadamente**, como:

$$\mathbf{\Delta z} \cong \mathbf{d}f = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} . \mathbf{\Delta x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} . \mathbf{\Delta y} \qquad (\mathbf{1})$$

- Voltando à função $f(x_0, y_0) = \mathbf{5}(\boldsymbol{x_0})^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}(\boldsymbol{y_0})^{\mathbf{2}}$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 10\, x_0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 6y_0$$

- Assim, voltando em $(\mathbf{1})$**:**

$$\mathbf{\Delta z} \cong 10\, x_0 . \mathbf{\Delta x} + 6y_0 . \mathbf{\Delta y}$$

$$\mathbf{\Delta z} \cong 10(2).(0{,}1) + 6(3).(0{,}1)$$

$$\mathbf{\Delta z} \cong 2 + 1{,}8 = \mathbf{3{,}8}$$

1. Diferencial de uma função (ou derivada total) *continuação*

- **A expressão abaixo é o diferencial de f(x,y)** no caso de f(x,y) ser **diferenciável** (ou seja, é possível calcular a derivada em todos os pontos de f(x,y):

$$\Delta \mathbf{z} \cong \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.\Delta \mathbf{x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.\Delta \mathbf{y} \qquad (\mathbf{1})$$

- Notação de diferencial ou derivada total: $\mathbf{d}\boldsymbol{f}$

  - Como saber se a função f(x,y) é **diferenciável** ou não?

- **Teorema 1:** Seja f(x,y) uma função de duas variáveis. Se as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ forem **contínuas**, então f(x,y) é diferenciável.

Para definição de continuidade de função de duas variáveis ver seção 9.5 do livro do Bussab & Morettin

1. Diferencial de uma função (ou derivada total) *continuação*

- Como saber se as derivadas parciais de f(x,y) são **contínuas**?

- **Teorema 2:**

2a) as funções polinomiais nas variáveis x e y são contínuas em todos os pontos de seu domínio.

- Exemplos:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \qquad D_f = R^2$$

$$f(x,y) = x^3y^2 + y^3 - xy + 6 \qquad D_f = R^2$$

2b) as funções racionais nas variáveis x e y são contínuas em todos os pontos de seu domínio.

- Exemplos:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1} \qquad D_f = \{(x,y) \in R^2 \ / \ xy \neq 1\}$$

1. Diferencial – Exemplo 1

- Seja $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$ $D_f = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x \neq y\}$. Posso usar a expressão de diferencial para calcular a derivada total dessa função?

- Para tanto é necessário verificar se essa função f(x,y) é diferenciável.

- Como saber se a função $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$ é diferenciável?

- Verificar se as suas derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ são **contínuas** através do **Teorema 2a ou 2b**.

- Então vamos calcular as derivadas parciais de $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$:

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2(x-y)-(2x)(1)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{0(x-y)-(2x)(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$

De acordo com o **Teorema 2b**, as funções racionais são contínuas em todos os pontos de seu domínio

$\Rightarrow$

Portanto, nesse caso, as <u>derivadas parciais de f(x,y)</u> são <u>contínuas</u> em todos os pontos de seu domínio.

1. Diferencial – Exemplo 1 *(continuação)*

- Como as derivadas parciais de $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$ são contínuas, isso significa (pelo **Teorema 1**) que $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$ é uma função diferenciável, e, portanto, podemos usar a expressão da diferencial para calcular a sua derivada total.

- Relembrando, a expressão do diferencial total de uma função é dada por:

$$df \cong \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.\mathbf{\Delta x} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}.\mathbf{\Delta y} \qquad (\mathbf{1})$$

- Aplicando para o caso da função $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$, o diferencial em um ponto genérico (x_0, y_0) será:

$$df \cong \frac{-2y_0}{(x_0-y_0)^2}.\mathbf{\Delta x} + \frac{2x_0}{(x_0-y_0)^2}.\mathbf{\Delta y}$$

1. Diferencial – Exemplo 2

- Seja $f(x, y) = 2x^2 + 4y^3$. É possível usar a expressão de diferencial para calcular a derivada total dessa função?

1) Verificar se as derivadas parciais da função são contínuas utilizando o Teorema 2a ou 2b.

➢ Calculam-se as derivadas:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 12y^2$$

➢ De acordo com o Teorema 2a as derivadas parciais são contínuas uma vez que são funções polinomiais.

2) portanto, de acordo com o Teorema 1, a função $f(x, y) = 2x^2 + 4y^3$ é diferenciável e é possível utilizar a expressão da diferencial para calcular a derivada total;

3) A diferencial em um ponto genérico (x_0, y_0) será:

$$df \cong 4x_0.\mathbf{\Delta x} + 12(y_0)^2.\mathbf{\Delta y}$$

1. Diferencial – Exemplo 3

- Seja a função de produção diária de determinada fábrica dada por: $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$.

Sabe-se também que $K_0 = 90.000 \; e \quad L_0 = 1.000$

Qual a variação na produção decorrente de um acréscimo de 1000 no capital investido, bem como do acréscimo de 2 funcionários?

a) Para verificar se é possível utilizar a expressão da diferencial, checar se a função de produção é diferenciável;

b) Para tanto, é necessário verificar se as suas derivadas parciais são contínuas;

c) Calcular as derivadas parciais:

$$f_K = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K} = \frac{1}{2}.60.K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} = 30K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} = \frac{30\,L^{\frac{1}{3}}}{K^{\frac{1}{2}}} \qquad (L\ está\ mantido\ constante)$$

$$f_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} = \frac{1}{3}.60.K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} = 20K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}} = \frac{20\,K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{2}{3}}} \qquad (K\ está\ mantido\ constante)$$

d) Como tanto f_K quanto f_L são funções racionais, de acordo com o Teorema 2b, são contínuas.

1. Diferencial – Exemplo 3 *(continuação)*

e) Como as derivadas parciais da função produção são contínuas, podemos afirmar (pelo Teorema 1) que a função de produção é diferenciável e, portanto, podemos utilizar a expressão da diferencial para calcular a sua derivada total:

f) Cálculo do diferencial total. De acordo com o enunciado, $K_0 = 90.000 \; e \quad L_0 = 1.000$, $\mathbf{\Delta K}$ =1000 e $\mathbf{\Delta L}$ = 2 , assim:

$$df \cong \frac{\partial Q(K_0, L_0)}{\partial K} . \mathbf{\Delta K} + \frac{\partial f(K_0, L_0)}{\partial L} . \mathbf{\Delta L} \qquad (\mathbf{1})$$

$$dQ \cong 30 K_0^{-\frac{1}{2}} L_0^{\frac{1}{3}} . \mathbf{\Delta K} + 20 K_0^{\frac{1}{2}} L_0^{-\frac{2}{3}} . \mathbf{\Delta L}$$

$$dQ \cong 30(90.000)^{-\frac{1}{2}} (1000)^{\frac{1}{3}} . (\mathbf{1000}) + 20(90.000)^{\frac{1}{2}} (1000)^{-\frac{2}{3}} . (\mathbf{2})$$

$$dQ \cong 30 \left(\frac{1}{90.000}\right)^{\frac{1}{2}} (10) . (\mathbf{1000}) + 20(300) \left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{2}{3}} . (\mathbf{2})$$

1. Diferencial – Exemplo 3 *(continuação)*

f) Cálculo do diferencial total. De acordo com o enunciado, $K_0 = 90.000\ e \quad L_0 = 1.000$, $\mathbf{\Delta K}$ =1000 e $\mathbf{\Delta L}$ = 2 , assim:

$$dQ \cong 30\left(\frac{1}{90.000}\right)^{\frac{1}{2}} (10)\,.\,(\mathbf{1000}) + 20(300)\ \left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{2}{3}}.\,(\mathbf{2})$$

$$dQ \cong 30\left(\frac{1}{300}\right) (10)\,.\,(\mathbf{1000}) + 20(300)\ \left(\frac{1}{100}\right).\,(\mathbf{2})$$

$$dQ \cong\ 1000 + 120 = \textbf{1120 unidades}$$

Ou seja, se o capital aumentar em 90.000 unidades e forem contratados mais 2 funcionários, a quantidade produzida irá aumentar em 1120 unidades por dia.