Controle Ótimo - Aula 10
Princípio do Mínimo de Pontryagin

Adriano A. G. Siqueira e Marco H. Terra

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de São Paulo - São Carlos

O problema de controle ótimo

Considere um sistema contínuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ 0 \leq t \leq T$$

com $x(0) = x_0$ dado,

$$u(t) \in U,\ 0 \leq t \leq T$$

e um funcional custo associado da forma

$$h(x(T)) + \int_0^T g(x(t),\ u(t))\, dt$$

O problema de controle ótimo consiste em determinar uma lei de controle (denominada lei de controle ótima) $\{u^*(t) : t \in [0, T]\}$ que aplicada ao sistema, minimize o funcional custo.

Proposição 2.1, p.93

Seja $V(t,x)$ uma solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, ou seja, V é continuamente diferenciável em (t,x) e é tal que

$$0 = min_{u \in U}[g(x,u) + \nabla_t V(t,x) + \nabla_x V(t,x)^T f(x,u)]$$

com condição limite $V(T,x) = h(x)$.

Suponha que $\mu^*(t,x)$ resolve o problema de mínimo acima para todo (t,x)

Seja $\{x^*(t) | t \in [0,T]\}$ a trajetória de estados do sistema quando o controle $u^*(t) = \mu^*(t, x^*(t))$ é aplicado e a condição inicial é $x(0)$.

Proposição 2.1, p.93

Suponha que $\{u^*(t) : t \in [0,T]\}$ seja admissível (contínua por partes em t e contida em U).

Então $V(t,x)$ é a única solução da equação de HJB e é igual à função ótima, ou seja,

$$V(t,x) = J^*(t,x), \forall (t,x)$$

Além disso, a lei de controle $\{u^*(t) : t \in [0,T]\}$ é ótima e a trajetória de estados ótima é $\{x^*(t) : t \in [0,T]\}$.

O problema Linear Quadrático

Considere o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

e o custo total

$$x^T(T)\,Q_T x(T) + \int_0^T x^T(t)\,Qx(t) + u^T(t)\,Ru(t)\,dt$$

sendo as matrizes Q_T e Q simétricas semidefinidas positivas e a matriz R simétrica definida positiva

O problema Linear Quadrático

Controle ótimo

$$u = -R^{-1}B^TK(t)x$$

Equação de Riccati no tempo contínuo

$$\dot{K}(t) = -K(t)A - A^TK(t) + K(t)BR^{-1}B^TK(t) - Q$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Seja a Equação de Hamilton -Jacobi-Bellman:

$$0 = min_{u \in U}[g(x,u) + \nabla_t J^*(t,x) + \nabla_x J^*(t,x)^T f(x,u)]$$

com condição limite $J^*(T,x) = h(x)$. Vimos que $J^*(t,x)$ satisfaz a equação acima sob certas condições e

$$u^*(t) = argmin_{u \in U}[g(x^*,u) + \nabla_x J^*(t,x^*)^T f(x^*,u)]$$

é a lei de controle ótima e $\{x^*(t) : t \in [0,T]\}$ a correspondente trajetória de estados ótima

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Na equação acima, não é necessário calcular $\nabla_x J^*$ para todos os valores de x e t,

Basta calcular para um valor de x em cada t, ou seja, ao longo da trajetória ótima, $\nabla_x J^*(t, x^*)$

$\nabla_x J^*(t, x^*)$ satisfaz uma equação diferencial chamada *equação adjunta*

Esta equação será obtida diferenciando a Equação de Hamilton -Jacobi-Bellman

Lema 3.1, pág. 97

Seja $F\left(t,x,u\right)$ continuamente diferenciável em t, x e u e seja $\mu^*\left(t,x\right)$ uma função continuamente diferenciável tal que

$$\mu^*\left(t,x\right) = arg\ min_{u \in U} F\left(t,x,u\right), \forall t,x$$

sendo U um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$. Então

$$\nabla_t \left\{min_{u \in U} F\left(t,x,u\right)\right\} = \nabla_t F\left(t,x,u^*(t,x)\right), \forall x,t$$

$$\nabla_x \left\{min_{u \in U} F\left(t,x,u\right)\right\} = \nabla_x F\left(t,x,u^*(t,x)\right), \forall x,t$$

Lema 3.1, pág. 97

Prova: Denote $y = (t, x)$, $F(y, u) = F(t, x, u)$ e $\mu^* (y) = \mu^* (t, x)$.
Como,

$$min_{u \in U} F (y, u) = F (y, u^* (y))$$

então

$$\nabla \{min_{u \in U} F (y, u)\} = \nabla_y F (y, u^*(y)) + \nabla u^*(y) \nabla_u F (y, u^*(y))$$

Vamos mostrar que o segundo termo é zero. Para $U = \Re^m$, ou seja, $\mu^* (y)$ é um mínimo sem restrição, $\nabla_u F (y, u^*(y)) = 0$

Lema 3.1, pág. 97

Como para cada y fixo, $\mu^*(y)$ minimiza $F(y,u)$ temos que

$$(u - \mu^*(y))^T \nabla_u F(y, u^*(y)) \geq 0$$

Para uma variação $y + \Delta y$, o valor que minimiza muda de $\mu^*(y)$ para

$$\mu^*(y + \Delta y) = \mu^*(y) + \nabla \mu^*(y)^T \Delta y + o(\Delta y)$$

Então

$$(\nabla \mu^*(y)^T \Delta y + o(\Delta y))^T \nabla_u F(y, u^*(y)) \geq 0 \; \forall \Delta y$$

Como a relação acima deve valer para todo Δy suficientemente pequeno, $\nabla u^*(y) \nabla_u F(y, u^*(y)) = 0$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Considere a Equação de Hamilton -Jacobi-Bellman:

$$0 = min_{u \in U}[g(x,u) + \nabla_t J^*(t,x) + \nabla_x J^*(t,x)^T f(x,u)]$$

Assuma que U é um conjunto convexo e $\mu^*(t,x)$ continuamente diferenciável. Diferenciando a Eq. HJB em x e em t, e aplicando o lema anterior

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_x g\left(x, \mu^*\left(t,x\right)\right) + \nabla^2_{xt} J^*(t,x) + \nabla^2_{xx} J^*\left(t,x\right) f\left(x, \mu^*\left(t,x\right)\right) \\ + \nabla_x f\left(x, \mu^*\left(t,x\right)\right) \nabla_x J^*\left(t,x\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

$$0 = \nabla^2_{tt} J^*\left(t,x\right) + \nabla^2_{xt} J^*\left(t,x\right)^T f\left(x, \mu^*\left(t,x\right)\right) \qquad (2)$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

As equações acima valem ara todo (x,t). Vamos calculá-las ao longo da trajetória e do controle ótimos: $\{x^*(t), u^*(t) \,|t \in [0,T]\}$ com $u^*(t) = \mu^*(t, x^*(t))$

Temos para todo t: $\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t))$

Então, o termo:

$\nabla^2_{xt} J^*(t, x^*(t)) + \nabla^2_{xx} J^*(t, x^*(t)) \, f(x^*(t), u^*(t))$

de (1), é igual a seguinte derivada total com relação a t

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_x J^*(t, x^*(t))\right)$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

De forma similar, o termo:

$$\nabla_{tt}^2 J^*(t, x^*(t)) + \nabla_{xt}^2 J^* \left(t, x^*(t)\right)^T f\left(x^*(t), u^*\left(t\right)\right)$$

de (2), é igual a seguinte derivada total com relação a t

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_t J^*\left(t, x^*(t)\right)\right)$$

Denotando

$$p(t) = \nabla_x J^*\left(t, x^*(t)\right)$$

$$p_0(t) = \nabla_t J^*\left(t, x^*(t)\right)$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Equação (1) fica

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x f\left(x^*(t), u^*\left(t\right)\right) p(t) - \nabla_x g\left(x^*(t), u^*\left(t\right)\right)$$

Este sistema de n equações diferenciais de primeira ordem é conhecida como **Equação Adjunta**

Equação (2) fica

$$\dot{p}_0(t) = 0$$

ou $p_0(t) =$ constante para todo $t \in [0, T]$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Da condição final:

$$J^*\left(T, x\right) = h(x)$$

e usando a definição de $p(t) = \nabla_x J^*\left(t, x^*(t)\right)$, temos uma condição final para a Eq. Adjunta

$$p(T) = \nabla h\left(x^*(T)\right)$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Resumindo: ao longo das trajetórias de controle e de estado ótima $u^*(t)$ e $x^*(t)$, a Eq. Adjunta é satisfeita com condição final $p(T) = \nabla h\left(x^*(T)\right)$, enquanto que a equação

$$u^*\left(t\right) = argmin_{u \in U}[g(x^*, u) + \nabla_x J^*(t, x^*)^T f(x^*, u)]$$

e a definição de $p(t)$ implicam

$$u^*\left(t\right) = argmin_{u \in U}[g(x^*, u) + p(t)^T f(x^*, u)]$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Formulação Hamiltoniana: Define-se a função $H(x, u, p) : \Re^n \times \Re^m \times \Re^n \to \Re$ dada por

$$H(x, u, p) = g(x, u) + p^T f(x, u)$$

A Eq. Adjunta

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x f\left(x^*(t), u^*\left(t\right)\right) p(t) - \nabla_x g\left(x^*(t), u^*\left(t\right)\right)$$

fica

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x^*(t), u^*(t), p(t))$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Princípio do Mínimo de Pontryagin: Seja $u^*(t)$ o controle ótimo e $x^*(t)$ a correspondente trajetória de estados ótima, ou seja,

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t))$$

$x^*(0) = x(0)$: dado

Seja $p(t)$ a solução da Eq. Adjunta

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x^*(t), u^*(t), p(t))$$

com condição final

$$p(T) = \nabla h\left(x^*(T)\right)$$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Princípio do Mínimo de Pontryagin: Então, para todo $t \in [0, T]$

$$u^*(t) = argmin_{u \in U} H(x^*(t), u, p(t))$$

Além disso, existe uma constante C tal que

$$H(x^*(t), u^*(t), p(t)) = -C$$

para todo $t \in [0, T]$

Princípio do Mínimo de Pontryagin

Para mostrarmos a última afirmação, considerado a Eq. HJB

$$0 = min_{u \in U}[g(x,u) + \nabla_t J^*(t,x) + \nabla_x J^*(t,x)^T f(x,u)]$$

e as definições de $p(t)$ e $p_0(t)$. Assim:

$$H(x^*(t), u^*(t), p(t)) = -\nabla_t J^*(t, x^*(t)) = -p_0(t)$$

e $p_0(t)$ é uma constante.

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

Um produtor com taxa de produção $x(t)$ no instante t pode alocar uma porção $u(t)$ de sua taxa de produção para investir (produzir mais) e uma porção $1-u(t)$ de sua taxa de produção para produzir uma mercadoria estocável. Assim, $x(t)$ evolui de acordo com a seguinte lei

$$\dot{x}(t) = \gamma u(t) x(t)$$

sendo $\gamma > 0$ uma constante dada. O produtor quer maximizar a quantidade total de produto armazenado

$$\int_0^T (1-u(t)) x(t) \, dt$$

com $0 \leq u(t) \leq 1$, para todo $t \in [0, T]$. Para uma dada taxa de produção inicial $x(0) > 0$, qual é a melhor ação $u(t)$ a ser efetuada?

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

O problema de otimização está na forma padrão com as seguintes identificações:

$$f(x, u) = \gamma u x$$

$$h(x) = 0$$

$$g(x, u) = (1 - u)\, x$$

$$U = \{u : 0 \leq u \leq 1\} = [0, 1]$$

$x(0) > 0$ é a taxa de produção inicial

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

A Hamiltoniana é

$$H\left(x,u,p\right) = g\left(x,u\right) + p^T f\left(x,u\right)$$

$$H\left(x,u,p\right) = \left(1-u\right)x + \gamma uxp = x[1 + \left(\gamma p - 1\right)u]$$

Se existe uma solução ótima $\left(u^*\left(t\right), x^*\left(t\right)\right)$ então deve existir uma solução $p\left(t\right)$ para a equação adjunta

$$\dot{p}(t)\left(t\right) = -\nabla_x H\left(x^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p\left(t\right)\right)$$

$$p\left(T\right) = \nabla h\left(x^*\left(T\right)\right)$$

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

Note que

$$\nabla_x H\left(x,u,p\right) = \nabla_x x[1 + \left(\gamma p - 1\right) u] = 1 + \left(\gamma p - 1\right) u = \gamma u p + 1 - u$$

Assim,

$$\dot{p}\left(t\right) = -\gamma u^*\left(t\right) p\left(t\right) - 1 + u^*\left(t\right)$$

$$p\left(T\right) = 0$$

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

Suponha que obtemos $p(t)$. Neste caso, a solução ótima $u^*(t)$ deve satisfazer o princípio do máximo de Pontryagin

$$u^*(t) = argmax_{u \in U} H(x^*(t), u, p(t))$$

$$u^*(t) = argmax_{u \in [0,1]} x^*(t)\left[1 + (\gamma p(t) - 1) u\right]$$

Como $x(t)$ representa uma taxa de produção, vamos supor que $x(t) \geq 0$. Assim:

(i) Se $p(t) > \frac{1}{\gamma}$, então temos o máximo em $u^*(t) = 1$

(ii) Se $p(t) < \frac{1}{\gamma}$, então temos $u^*(t) = 0$

(i) Se $p(t) = \frac{1}{\gamma}$, então temos $u^*(t)$ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

Voltando para a Eq. Adjunta, como $p(T) = 0$, para uma vizinhança de T temos

$$p(t) < \frac{1}{\gamma} \text{ e } u^*(t) = 0, \quad t_s \leq t \leq T$$

Neste intervalo, a Eq. Adjunta é dada por

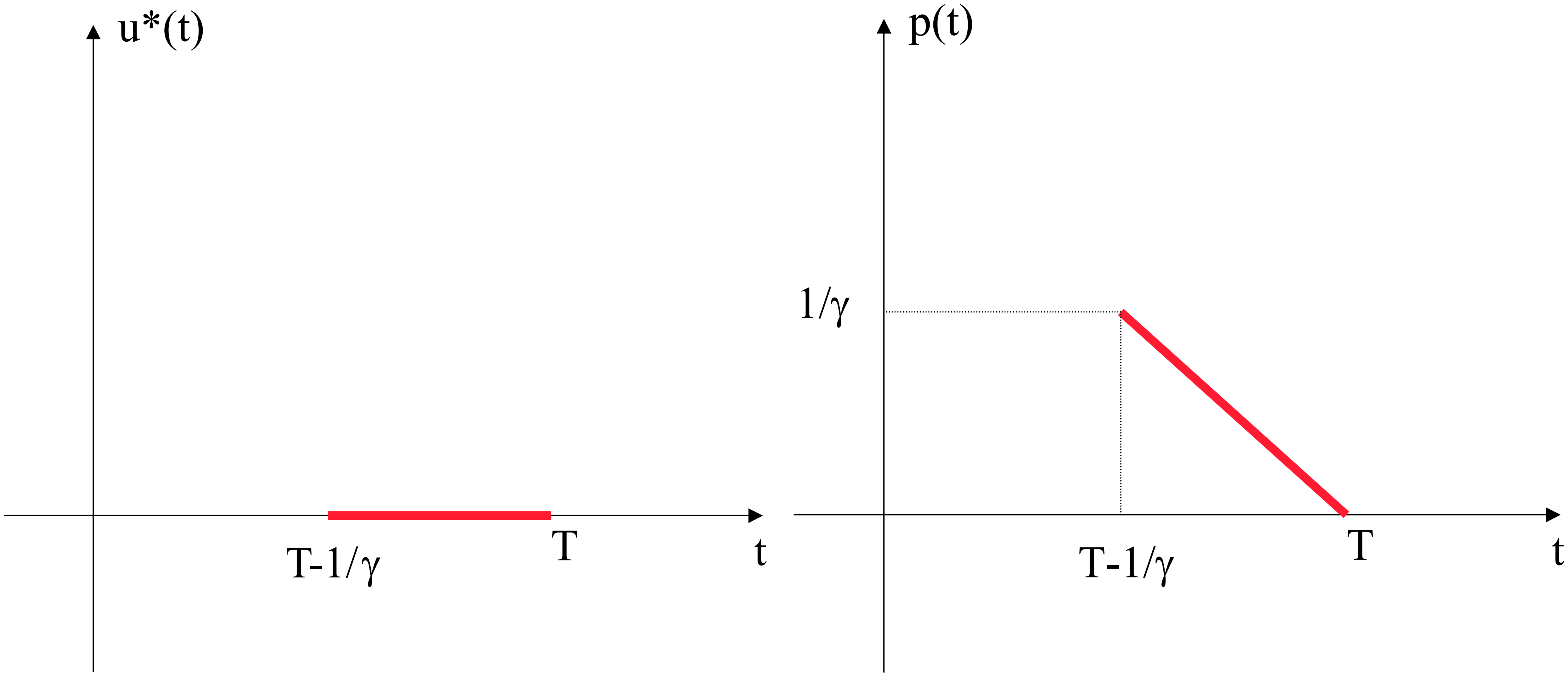
$$\dot{p}(t) = -1, \quad t_s \leq t \leq T$$

$$p(T) = 0$$

Assim, devemos ter $\qquad p(t) = T - t$

até que $p(t_s) = \frac{1}{\gamma}$, ou seja, até $t_s = T - \frac{1}{\gamma}$.

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103



Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

Para $t < t_s = T - \frac{1}{\gamma}$, temos $p(t) > \frac{1}{\gamma}$, assim

$$u^*(t) = 1, \quad t \leq T - \frac{1}{\gamma}$$

A Eq. Adjunta é dada por

$$\dot{p}(t) = -\gamma p(t), \qquad t \leq T - \frac{1}{\gamma}$$

$$p\left(T - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}$$

Assim, devemos ter

$$p(t) = p\left(T - \frac{1}{\gamma}\right) e^{-\gamma\left(t - T + \frac{1}{\gamma}\right)} = \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\left(t - T + \frac{1}{\gamma}\right)}$$

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103

Portanto,

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < T - \frac{1}{\gamma} \\ 0 & \text{se } T - \frac{1}{\gamma} < t \leq T \\ \text{qualquer valor entre } 0 \text{ e } 1 & \text{se } t = T - \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

Exemplo 3.2: Alocação de Recurso, pág. 103