UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

2. Transformações Lineares

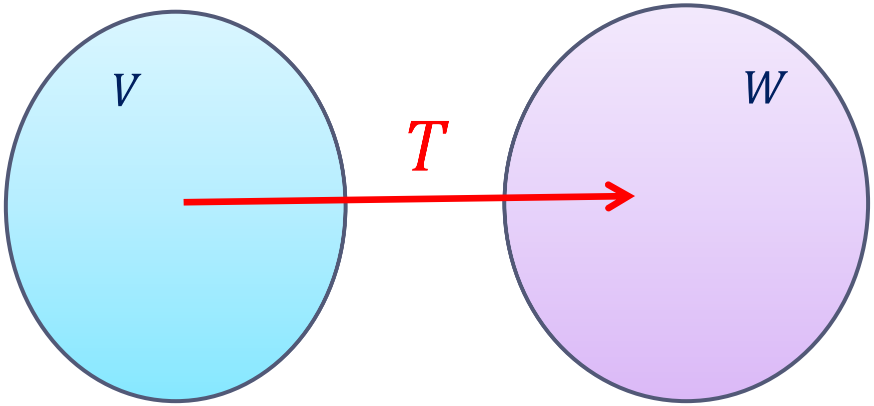
LOB 1037 – Álgebra Linear
Profa. Paula C P M Pardal

DEFINIÇÃO:

Sejam V e W espaços vetoriais reais. Uma função de V em W, $T: V \to W$, é chamada *transformação linear* (TL), ou aplicação linear, se satisfizer duas condições:

I. $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}),\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$

II. $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}),\ \forall\, \vec{u} \in V; \forall \alpha \in \mathbb{R}$



Exemplos

1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear.

2) $T\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \to 3x$ ou $T(x) = 3x$ é linear. Aqui, os vetores são n. reais.

- Essa TL representa uma reta que passa pela origem. E, se uma transformação representa uma reta que não passa pela origem, ela é não linear:

$$T\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ T(x) = 3x + 1 \text{ é não linear.}$$

3) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \to -\vec{v}$ ou $T(\vec{v}) = -\vec{v}$ é linear (simetria).

   i. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$ ou $T(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ é linear (simetria em relação à origem no $\mathbb{R}^3$).

4) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1, 0{,}0)$ ou $T(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, 0{,}0)$ é linear (projeção).

i. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x, y, 0)$ é linear (projeção ortogonal sobre o plano Oxy).

ii. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x, 0{,}0)$ é linear (projeção ortogonal sobre o eixo Ox).

5) Seja o EV $V = M(n, n)$. A transformação $T: A \to A^T$, que leva $A \in V$ em sua transposta $A^T \in V$, é linear.

6) Seja o EV $V = P_n(x)$ dos polinômios de grau $\leq n$.

i. A transformação $D: P_n(x) \to P_{n-1}(x)$, que leva $f(x) \in V$ em sua derivada $f'(x) \in P_{n-1}(x)$, isto é, $D(f(x)) = f'(x)$, é linear.

ii. A transformação $T: P_n(x) \to \mathbb{R}$, em que $T(p) = \int_a^b p(x)dx$ $(a, b \in \mathbb{R})$ associa a cada polinômio $p(x) \in V$ sua integral definida $T(p) \in \mathbb{R}$, é linear.

Propriedades da Transformação Linear

1. $T(\vec{0}) = \vec{0}$

2. Se $T: V \to W$ for uma TL, então:

$$T(a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}) = a_1T(\overrightarrow{v_1}) + a_2T(\overrightarrow{v_2})\ ;\ \forall\ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V, \forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

De forma análoga:

$$T(a_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}) = a_1T(\overrightarrow{v_1}) + \cdots + a_nT(\overrightarrow{v_n})\ ; \forall\ \overrightarrow{v_i} \in V, \forall\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n$$

Isto é: *A imagem de uma CL de vetores é a CL das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.*

Decorre da Propriedade (2)

Suponha conhecidas uma base $B = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ do domínio V e as imagens $T(\overrightarrow{v_1}), \cdots, T(\overrightarrow{v_n})$ dos vetores de B. Sempre é possível obter a imagem $T(\vec{v})$ de qualquer $\vec{v} \in V$, pois $\vec{v}$ é CL dos vetores da base e, pela propriedade da TL, tem-se:

$$T(\vec{v}) = a_1 T(\overrightarrow{v_1}) + \cdots + a_n T(\overrightarrow{v_n}), \ \ \text{com } \vec{v} = a_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + a_n \overrightarrow{v_n}$$

Uma TL $T: V \to W$ *fica completamente definida quando se conhecem as imagens dos vetores de uma base do domínio* V.

Exemplo: Sabendo que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma TL e que $T(1,-1) = (3,2,-2)$ e $T(-1,2) = (1,-1,3)$, determine $T(x, y)$.

EXERCÍCIOS

1. Dentre as transformações abaixo, verifique quais são lineares:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T(x, y) = (y - x, 0)$. Linear

b) $T: M(2,2) \to \mathbb{R}; T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Não Linear

c) $T_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T_A(\vec{v}) = A\vec{v}$, com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Linear

2. Determine a TL $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$. Encontre $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(\vec{v}) = (-2,1,-3)$.

$T(x, y) = (-2x + y, -x + y, -x); \vec{v} = (3,4)$

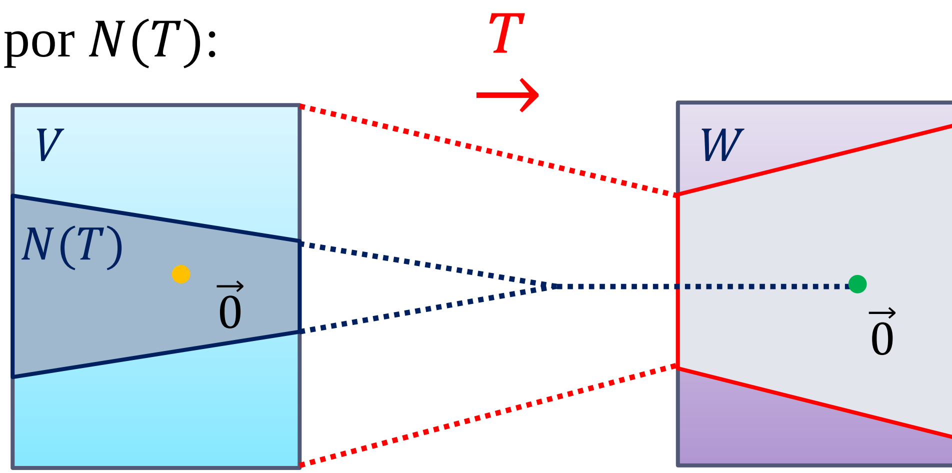
3. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma TL e $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, com $\overrightarrow{v_1} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$ e $\overrightarrow{v_3} = (1,1,0)$. Determine $T(5,3,-2)$, sabendo que $T(\overrightarrow{v_1}) = (1,-2)$, $T(\overrightarrow{v_2}) = (3,1)$ e $T(\overrightarrow{v_3}) = (0,2)$.

$T(5,3,-2) = (-10,20)$

DEFINIÇÃO:

Chama-se ***núcleo*** de uma TL $T: V \to W$ o conjunto de todos os vetores $\vec{v} \in V$ transformados em $\vec{0} \in W$. Indica-se por $N(T)$:

$$N(T) = \{\vec{v} \in V \;/\; T(\vec{v}) = \vec{0}\}$$



***Exemplo* (1):**

O núcleo da TL $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x + y$ é o conjunto:

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; T(x, y) = 0\}.$$

Isto é: $N(T) = \{x(1, -1) \;/\; x \in \mathbb{R}\}$ ou $N(T) = [(1, -1)]$.

DEFINIÇÃO:

Uma TL $T: V \to W$ será injetora se, para $\vec{u}, \vec{v} \in V: T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$.

Ou, equivalentemente, T será injetora se, para $\vec{u}, \vec{v} \in V: \vec{u} \neq \vec{v} \Rightarrow T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$.

Em outras palavras: T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.

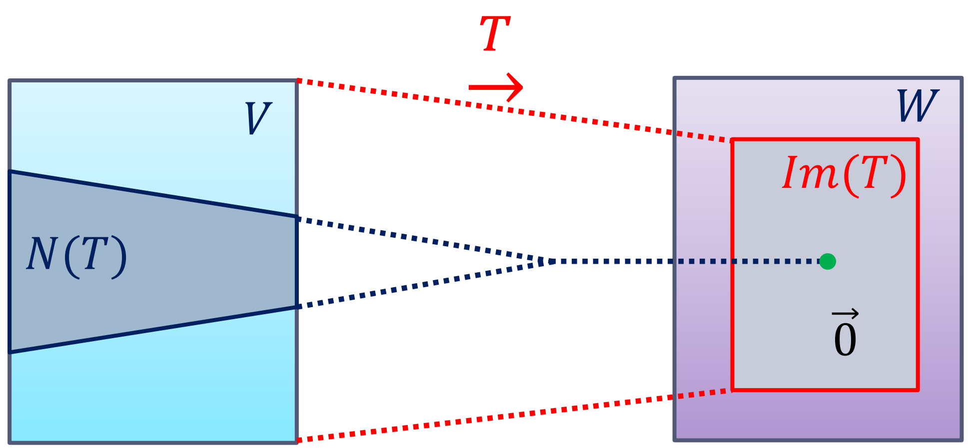
TEOREMA I:

Uma TL $T: V \to W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{\vec{0}\}$.

DEFINIÇÃO:

Seja uma TL $T: V \to W$. O conjunto dos vetores $\vec{w} \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $\vec{v} \in V$ é chamado ***imagem*** de uma TL. Indica-se por $Im(T)$ ou $T(\vec{v})$:

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W \; ; \; T(\vec{v}) = \vec{w} \text{ para algum } \vec{v} \in V\}$$



Observe: se $Im(T) = W$, T é sobrejetora, pois $\forall \, \vec{w} \in W$ existirá pelo menos um $\vec{v} \in V$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{w}$.

Propriedade do Núcleo

O núcleo de uma TL $T: V \rightarrow W$ é um SEV de V.

PROVA:

Sejam $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in N(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então: $T(\overrightarrow{v_1}) = \vec{0}$ e $T(\overrightarrow{v_2}) = \vec{0}$. Deve-se mostrar que $T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) \in N(T)$ e $T(\alpha\overrightarrow{v_1}) \in N(T)$:

I. $T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \therefore \in N(T)$

II. $T(\alpha\overrightarrow{v_1}) = \alpha\, T(\overrightarrow{v_1}) = \alpha\, \vec{0} = \vec{0} \therefore \in N(T)$

Logo: $N(T)$ é um SEV de V.

Propriedade da Imagem

A imagem de uma TL $T: V \rightarrow W$ é um SEV de W.

PROVA:

Sejam $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Deve-se mostrar que $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \in Im(T)$ e $\alpha\overrightarrow{w_1} \in Im(T)$, isto é, que $\exists\, \vec{u}, \vec{v} \in V$ tais que $T(\vec{u}) = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ e $T(\vec{v}) = \alpha\overrightarrow{w_1}$:

Como $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in Im(T), \exists\, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V \,/\, T(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{w_1}; T(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{w_2}$.

Fazendo: $\vec{u} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ e $\vec{v} = \alpha\overrightarrow{v_1}$, tem-se:

I. $T(\vec{u}) = T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \;\therefore \in Im(T)$

II. $T(\vec{v}) = T(\alpha\overrightarrow{v_1}) = \alpha\, T(\overrightarrow{v_1}) = \alpha\overrightarrow{w_1} \;\therefore \in Im(T)$

Logo: $Im(T)$ é um SEV de W.

***Exemplo* (2):** Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$, determine $N(T)$ e $Im(T)$, uma base para cada subespaço e suas dimensões:

$$Im(T) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}; \dim(Im(T)) = 2 \rightarrow \text{plano } Oxy;$$

$$N(T) = \{(0,0, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}; \dim(N(T)) = 1 \rightarrow \text{eixo } Oz.$$

Sejam V um EV de dimensão finita e $T: V \rightarrow W$ uma TL. Então:

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(V)$$

Observação: No Exemplo (2) foi visto que:

- $Im(T) = 0xy \rightarrow \dim\big(Im(T)\big) = 2$
- $N(T) = 0z \rightarrow \dim\big(N(T)\big) = 1$

Logo: $\dim(V) = \dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = 3$ e $V = \mathbb{R}^3 \therefore \dim(V) = 3$.

Corolário:

Sejam V e W EVs de *mesma dimensão* e seja $T: V \to W$ uma TL. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) T é sobrejetora.

b) T é bijetora.

c) T é injetora.

d) T transforma base de V em base de W.

Posto e Nulidade

Sejam V um EV de dimensão finita e $T: V \rightarrow W$ uma TL. São válidas as seguintes definições:

i. O *posto* de T é a dimensão da $Im(T)$;

ii. A *nulidade* de T é a dimensão do $N(T)$.

Assim, se um EV V tiver dimensão finita, o *Teorema da Dimensão* para uma TL $T: V \rightarrow W$, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\text{Posto}(T) + \text{Nulidade}(T) = \dim(V)$$

EXERCÍCIOS

Nos problemas a seguir são definidas TLs. Determine:

a) $N(T)$, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justifique.

b) $Im(T)$, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justifique.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (3x - y, -3x + y)$.

$N(T) = \{x(1,3); x \in \mathbb{R}\}, \dim(N(T)) = 1; Im(T) = \{y(-1,1); y \in \mathbb{R}\}, \dim\big(Im(T)\big) = 1.$

2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x - 2y, x + y)$.

$N(T) = \{(0,0)\}, \dim(N(T)) = 0; Im(T) = \mathbb{R}^2, \dim\big(Im(T)\big) = 2.$

3. $T: P_1(x) \to \mathbb{R}^3, T(ax + b) = (a, b, a - b)$.

$N(T) = \{0\}, \dim(N(T)) = 0; Im(T) = \{(x, y, x - y); x, y \in \mathbb{R}\}, \dim\big(Im(T)\big) = 2.$

4. $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^2, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$.

$N(T) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}; c, d \in \mathbb{R}\right\}, \dim(N(T)) = 2; Im(T) = \mathbb{R}^2, \dim\big(Im(T)\big) = 2.$

5. Seja a TL $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$.

a) Determine $T(x,y)$; $T(x,y) = (2x+y, 3x+2y, -2x-y)$

b) Determine $N(T)$ e $Im(T)$; $N(T) = \{\vec{0}\}, Im(T) = \{(a,b,-a); a,b \in \mathbb{R}\}$

c) A TL é injetora? E sobrejetora? Justifique.

T é injetora, mas não é sobrejetora, pois: $\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(V)$

6. Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a TL tal que $T(1,0,0,0) = (1,-2,1)$, $T(0,1,0,0) = (-1,0,-1)$, $T(0,0,1,0) = (0,-1,2)$ e $T(0,0,0,1) = (1,-3,1)$.

a) Determine $N(T)$ e $Im(T)$; $N(T) = \{y(3,1,0,-2); y \in \mathbb{R}\}, Im(T) = \mathbb{R}^3$

b) Determine bases para o núcleo e a imagem;

c) Verifique o Teorema da Dimensão.

5. Inversa de uma Transformação Linear

- A característica de uma TL $T: V \to W$ de ser injetora e sobrejetora (bijetora) recebe o nome de *isomorfismo* ou *automorfismo*. Neste caso, os EVs são ditos isomorfos ou automorfos.
  - Do ponto de vista da Álgebra Linear, EVs isomorfos são idênticos.
  - Pelo Teorema da Dimensão ➔ EVs isomorfos têm mesma dimensão.
    - De acordo com o Corolário do Teorema da Dimensão ➔ um isomorfismo leva de base de V em base de W.

DEFINIÇÃO:

Um isomorfismo $T: V \rightarrow W$ tem uma transformação inversa, $T^{-1}: W \rightarrow V$, que também é linear e um isomorfismo.

EXEMPLO:

Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$.

Se possível, calcule $T^{-1}(x, y, z)$.

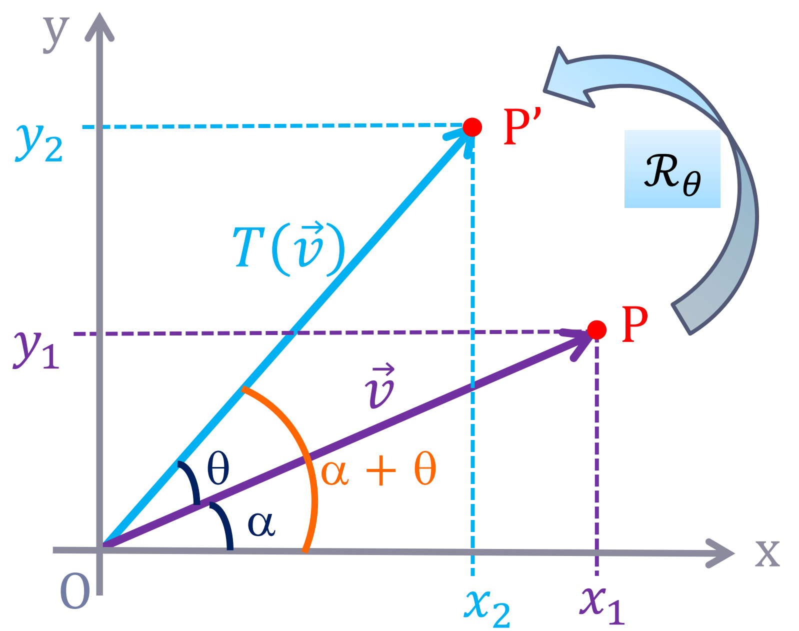
DEFINIÇÃO:

- As transformações lineares de um EV V em si mesmo, isto é, $T: V \to V$, são chamadas *operadores lineares sobre* V.
  - Sendo um caso particular das TLs, as propriedades gerais dessas também são válidas para os operadores lineares (OLs).

$\mathcal{R}_\theta$: *Rotação no* $\mathbb{R}^2$

- Representa o operador que rotaciona um ponto P de um ângulo θ em torno da origem e no sentido anti-horário, levando-o em um ponto P'.
- Das ***Coordenadas Polares***: qualquer ponto $\mathrm{P} \in \mathrm{O}xy$ pode ser representado pela distância $r = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ do ponto até a origem O e pelo ângulo φ formado entre r e o eixo horizontal $\mathrm{O}x$, tal que $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$.

$$r = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$$



Portanto, as coordenadas polares do ponto P são: $\begin{matrix} x_1 = r\cos\alpha \\ y_1 = r\text{sen}\alpha \end{matrix}$

E, do ponto P': $\begin{matrix} x_2 = r\cos(\alpha+\theta) \\ y_2 = r\text{sen}(\alpha+\theta) \end{matrix}$, que equivale a:

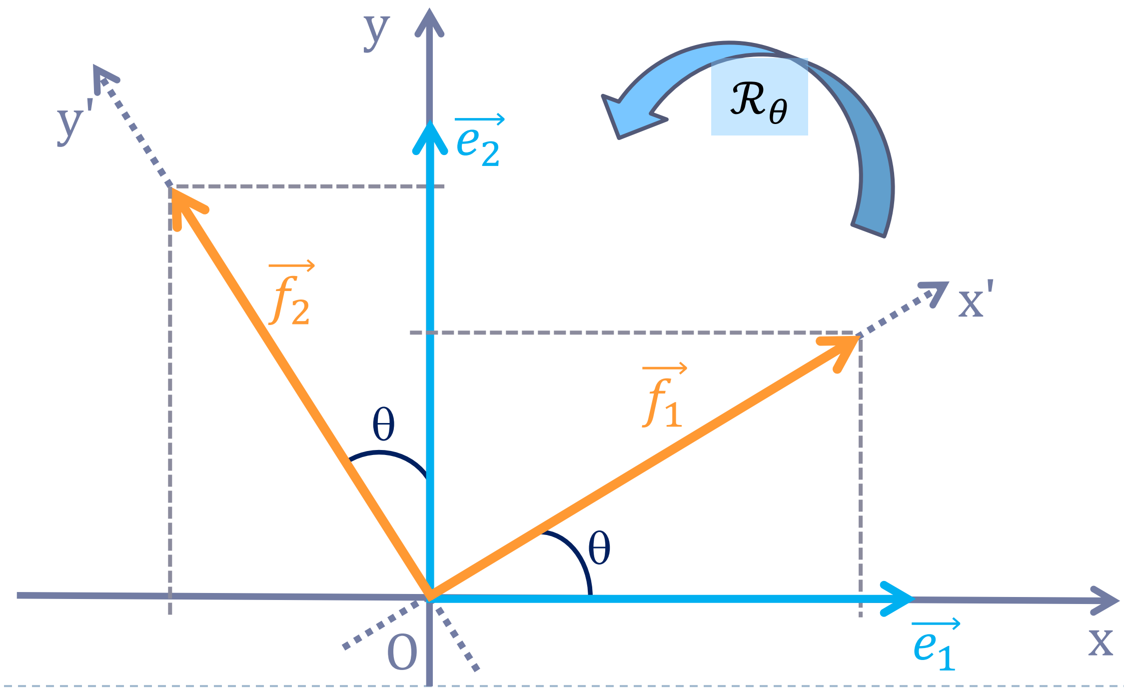
$$\begin{matrix} x_2 = r\cos\alpha\cos\theta - r\text{sen}\alpha\text{sen}\theta \\ y_2 = r\text{sen}\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\text{sen}\theta \end{matrix} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_2 = x_1\cos\theta - y_1\text{sen}\theta \\ y_2 = x_1\text{sen}\theta + y_1\cos\theta \end{cases}$$

Reescrevendo em notação matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \therefore \mathcal{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Outra forma de analisar a Rotação

- Considere, no EV $V = \mathbb{R}^2$, a base canônica $C = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Suponha agora o efeito da rotação de um ângulo em torno de um ponto sobre os vetores da base.
  - Em outras palavras: o que acontece quando uma base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ do $\mathbb{R}^2$ é rotacionada de um ângulo θ em torno da origem O?



Da figura anterior:

$$\overrightarrow{f_1} = \overbrace{T(\overrightarrow{e_1})}^{\text{imagem de } \overrightarrow{e_1}} = T(1,0) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta); \qquad \overrightarrow{f_2} = \overbrace{T(\overrightarrow{e_2})}^{\text{imagem de } \overrightarrow{e_2}} = T(0,1) = (-\mathrm{sen}\theta, \cos\theta)$$

E lembrando que:

i. T é linear: $\begin{cases} T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}),\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V \\ T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}),\ \forall\, \vec{u} \in V; \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}.$

ii. $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, pois todo vetor $\in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como CL dos vetores de uma base.

iii. $T(x,y) = T\big(x(1,0)\big) + T(y(0,1))$.

Tem-se:

$$T\big(x(1,0)\big) = x(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta) \rightarrow T(x,0) = (x\cos\theta, x\mathrm{sen}\theta)$$

$$T\big(y(0,1)\big) = y(-\mathrm{sen}\theta, \cos\theta) \rightarrow T(0,y) = (-y\mathrm{sen}\theta, y\cos\theta)$$

Assim:

$$T(x,y) = T(x,0) + T(0,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)$$

Escrevendo $T(x,y)$ na forma matricial:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{\text{coordenadas do vetor em uma base qualquer } P} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{[I]_P^C = \mathcal{R}_\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{coordenadas do vetor na base canônica } C}$$

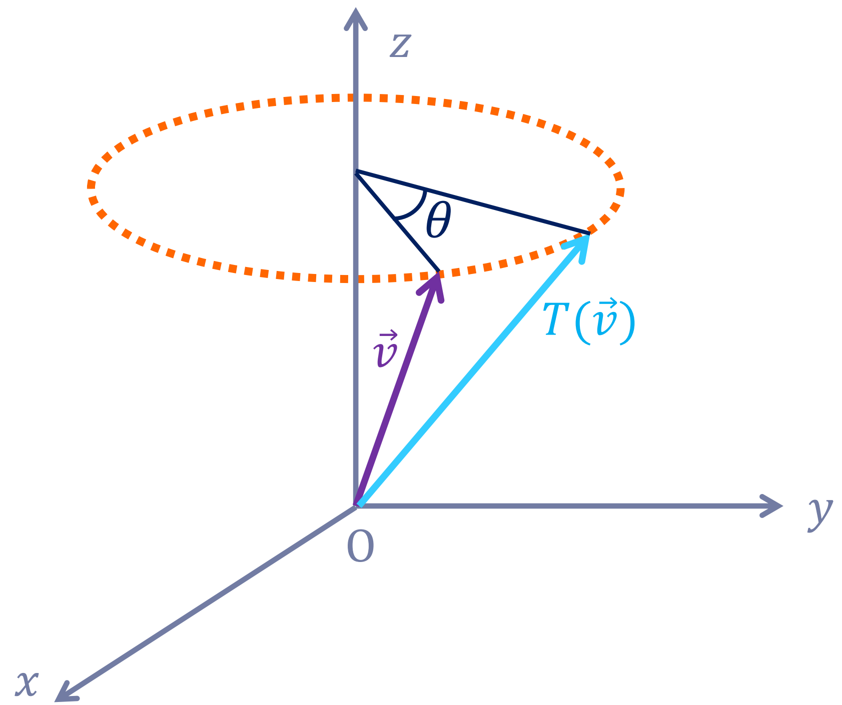
- Portanto: $[I]_P^C = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
  - De onde se conclui que a matriz mudança de base de C para P é uma matriz de rotação, que leva da base canônica C para uma base P, obtida de C pela rotação de um ângulo θ.
- Como a matriz de rotação é uma matriz de mudança de base, tem-se que:

$$[I]_C^P = \left([I]_P^C\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é a matriz que relaciona as coordenadas de qualquer vetor da base P com as suas coordenadas em relação à base C.

Observação: Rotação no $\mathbb{R}^3$

- A rotação no espaço é um OL no espaço, entendido como uma TL de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.
  - Dentre as possíveis rotações no espaço, destacam-se aquelas em que cada ponto $P \in \mathbb{R}^3$ descreve um ângulo θ em torno de um dos eixos coordenados $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ ou $\mathrm{O}z$.
- A rotação em torno de $\mathrm{O}z$ pode ser geometricamente representada como:



- Para a rotação em torno de Oz:

$$T_z(x,y,z) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para a rotação em torno de Oy:

$$T_y(x,y,z) = (x\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\theta, y, x\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Para a rotação em torno de Ox:

$$T_x(x,y,z) = (x, y\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\theta, y\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que, para uma rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$, o vetor $\vec{v}$ de coordenadas $\vec{v}_C = (4,2)$ na base canônica C, terá coordenadas $\vec{v}_P = (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ na base P.

2. Os pontos $A(-1,-1)$, $B(4,1)$ e $C(a,b)$ são os vértices de um triângulo retângulo isósceles, reto em A. Determine as possíveis coordenadas do vértice C, fazendo uso de matriz de rotação.

   $C(-3,4)$ ou $C(1,-6)$

3. Determine a matriz do OL de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que representa a sequência: (1) rotação de $\frac{\pi}{6}$ no sentido horário; (2) duplicação dos módulos; e (3) inversão dos sentidos.

$$[T]_{1,2,3} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$