MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

MAP2320

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

3.3.1 Condições de Fronteira Mistas

Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura zero e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de t, ou seja,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Derivando e substituindo na equação diferencial obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de t. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante, ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias com condições de fronteira

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0,\ X'(L) = 0 & (3.11) \\ T'(t) - \alpha^2 \lambda T(t) = 0 & (3.12) \end{cases}$$

As condições de fronteira $X(0) = X'(L) = 0$ decorrem do fato de que

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{e} \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t).$$

A equação $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ pode ter como soluções,

Se $\lambda > 0$ **:** $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Se $\lambda = 0$ **:** $X(x) = c_1 + c_2 x$.

Se $\lambda < 0$ **:** $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

As condições de fronteira $X(0) = 0$ e $X'(L) = 0$ implicam que

Se $\lambda > 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, obtemos que $0 = c_1 + c_2$, ou seja, $c_2 = -c_1$. Logo

$$X(x) = c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{\lambda}c_1(e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})$, obtemos que se $c_1 \neq 0$, então

$$e^{\sqrt{\lambda}L} = e^{-\sqrt{\lambda}L}$$

o que não é possível se $\lambda > 0$ (só é possível se $\lambda = 0$).

Se $\lambda = 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 + c_2 x$, obtemos que $c_1 = 0$. Logo

$$X(x) = c_2 x.$$

Substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = c_2$, obtemos que também $c_2 = 0$.

Se $\lambda < 0$:

Substituindo-se $x = 0$ e $X = 0$ em $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que $c_2 = 0$. Logo

$$X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Agora substituindo-se $x = L$ e $X' = 0$ em $X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$, obtemos que se $c_2 \neq 0$, então

$$\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

o que implica que

$$\sqrt{-\lambda}L = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto o problema de valores de fronteira (3.11) tem soluções fundamentais

$$X_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}$ na equação diferencial (3.12) obtemos

$$T'(t) + \frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2} T(t) = 0$$

que tem como solução fundamental

$$T_{2n+1}(t) = e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo o problema formado pela equação diferencial parcial e as condições de fronteira tem soluções fundamentais

$$u_{2n+1}(x,t) = X_{2n+1}(x)T_{2n+1}(t) = \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Além disso, combinações lineares dessas soluções são também solução

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1}u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} c_{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Vamos supor que a solução do PVIF seja a série

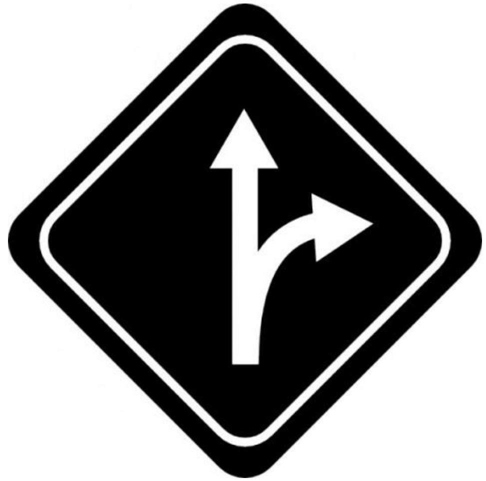
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}u_{2n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi x}{2L}e^{-\frac{\alpha^2(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}$$

Então, para satisfazer a condição inicial $u(x,0) = f(x)$, temos que impor a condição

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de índice ímpar de $f(x)$.


ATENÇÃO
DESVIO A
DIREITA



2.1 Teorema de Fourier

Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R},\ -1 \le c < d \le 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} s \Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi} \cos s \Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2} (-s \cos s + \operatorname{sen} s) \Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(2)}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3} \left((s^2 - 2) \operatorname{sen} s + 2s \cos s\right) \Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(2)}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3} \left(2s \operatorname{sen} s + (2 - s^2) \cos s\right) \Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$

2.1.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é par a sua série de Fourier tem somente os termos em cossenos,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem par no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{se } -L \le t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \le t < L \end{cases}$$

é a extensão par de f. E assim temos o seguinte resultado.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt,$$

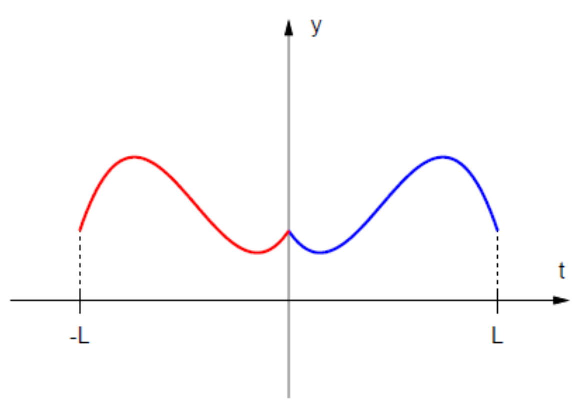


Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

2.1.1 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Ou seja, se uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é ímpar a sua série de Fourier tem somente os termos em senos,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}.$$

Para as funções f que são definidas apenas em $[0, L]$ podemos prolongá-las de forma que elas se tornem ímpar no intervalo $[-L, L]$:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & \text{se } -L \leq t < 0 \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \end{cases}$$

é a extensão ímpar de f. E assim temos o seguinte resultado.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt,$$

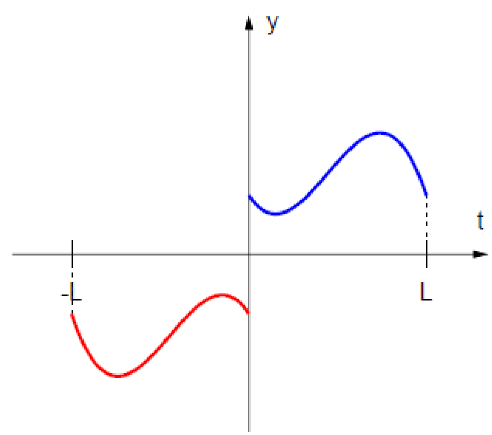
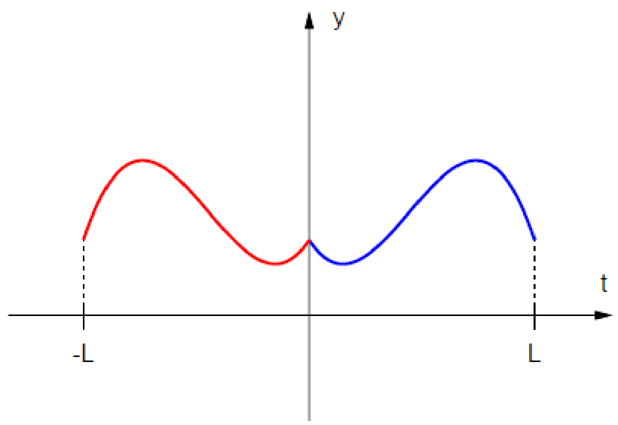


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$



A mesma função no intervalo [0,L] pode ser aproximada por séries de senos ou cossenos.

Figura 2.3 – Prolongamento par de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Se a função for polinomial pode-se usar os coeficientes da tabela para o intervalo [-L,L] multiplicando os coeficientes por 2.

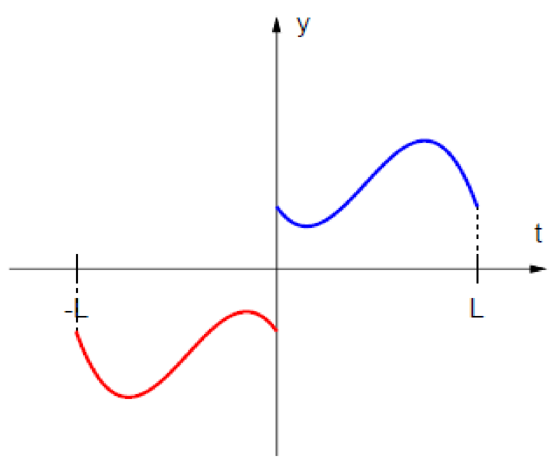


Figura 2.4 – Prolongamento ímpar de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

2.2 Séries de Fourier de Senos e de Cossenos de Índices Ímpares

Análogo ao caso de integração de funções ímpares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = -h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t)dt = 0. \tag{2.19}$$

Também análogo ao caso de integração de funções pares no intervalo $[-L, L]$, se $h : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, ou seja, se é tal que

$$h(2L - t) = h(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

então (verifique!)

$$\int_0^{2L} h(t)dt = 2\int_0^{L} h(t)dt. \tag{2.20}$$

Indice ímpar $\displaystyle\int_0^{2L} h(t)dt = 2\int_0^{L} h(t)dt.$

Indice par $\displaystyle\int_0^{2L} h(t)dt = 0.$

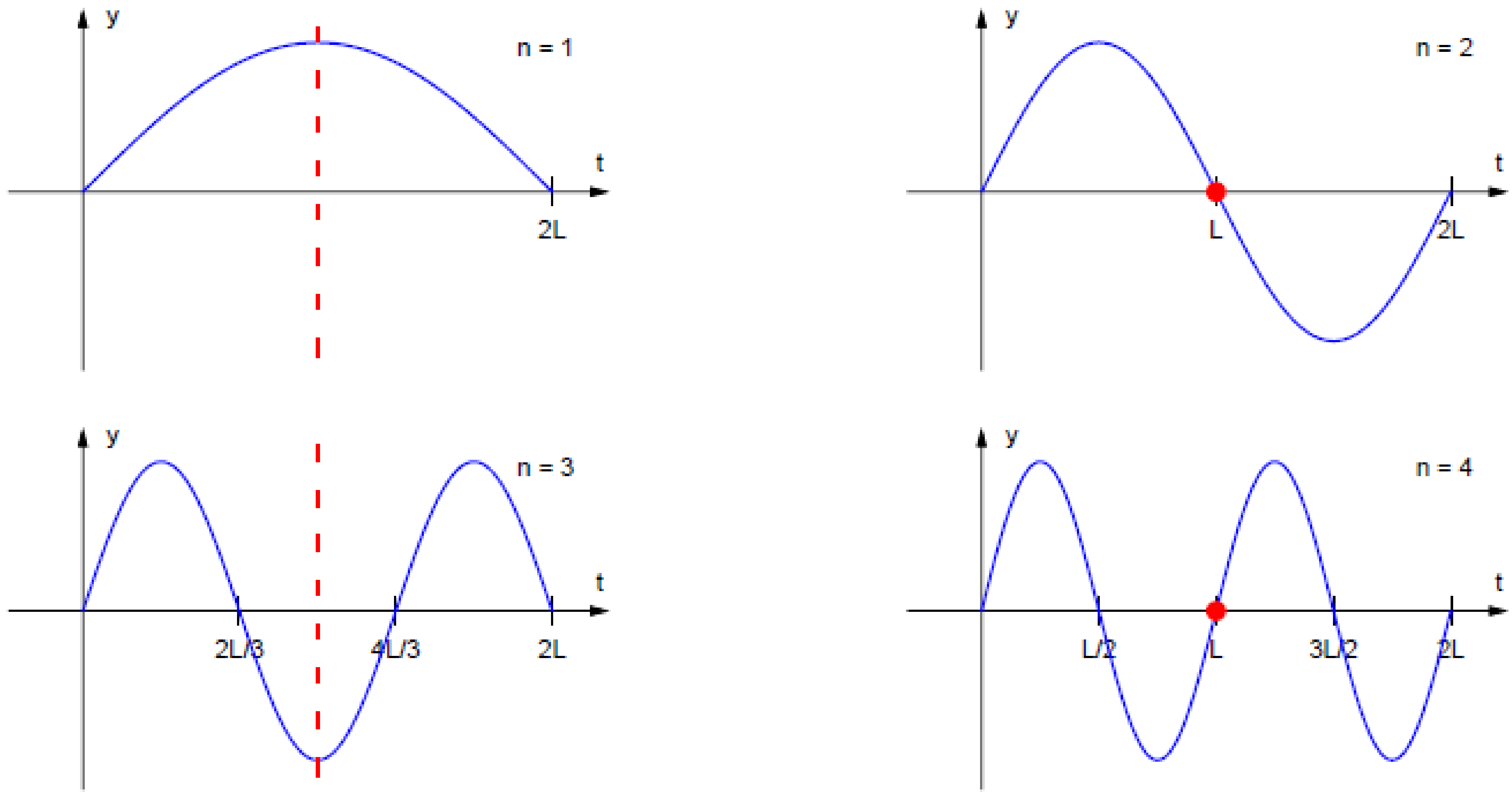


Figura 2.20 – $\operatorname{sen}\dfrac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Já vimos que se uma função $f : [0, 2L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 2.5 ela pode ser representada por sua série de Fourier de senos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

serie de senos

$$b_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Se a função f é simétrica em relação à reta $t = L$, isto é, se

$$f(2L - t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como $\operatorname{sen} \dfrac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ (veja a Figura 2.20), então o produto $f(t) \operatorname{sen} \dfrac{2k\pi t}{2L}$ é simétrico em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ e como $\operatorname{sen} \dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (veja a Figura 2.20), então o produto $f(t) \operatorname{sen} \dfrac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrico em relação à reta $t = L$ (verifique!).

Assim,
separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

x2 série de senos e x2 pela simetria

$$\begin{aligned} b_{2k} &= 0 \\ b_{2k+1} &= \frac{4}{2L}\int_0^L f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0,2L)$$

Ou seja, se uma função $f : [0,2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação à reta $t = L$, a sua série de Fourier de senos tem somente os termos de índice ímpar.
Para as funções f que são definidas apenas em $[0,L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0,2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação à reta $t = L$, ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L \\ f(2L-t), & \text{se } L \leq t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação à reta $t = L$. Assim temos o seguinte resultado.

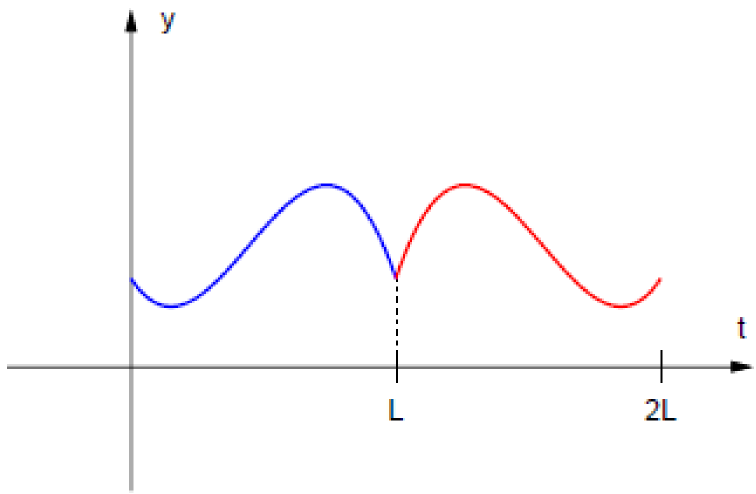


Figura 2.21 – Prolongamento com simetria em relação à reta $t = L$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.9. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de senos de índice ímpar de f*

$$Ssi_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$b_{2k+1} \quad = \quad \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de senos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t < L, \\ f(2L - t), & \text{se } L \leq t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \leq t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t).$$

ou seja, $\tilde{f}$ é a extensão de f que é periódica de período $4L$, ímpar e simétrica em relação a reta $t = L$, então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Como calcular a série de senos de índices ímpares de uma função no intervalo [0,L]

Sendo a função polinomial utilize a tabela com as seguintes alterações:

- Substitua o valor de L por 2L
- Considere as frações c e d em relação ao intervalo 2L (ou seja divida-as por 2)
- Aplique a combinação linear dos coeficientes da mesma forma anterior
- Ao final multiplique por 4

De forma análoga o mesmo raciocínio pode ser executado para as séries de cossenos de índice ímpar

Já vimos que se uma função $f : [0,2L] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes com derivada f' também contínua por partes, então pelo Corolário 2.4 ela pode ser representada por sua série de Fourier de cossenos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi t}{2L}.$$

com os coeficientes dados por

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2L} dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se a função f é simétrica em relação ao ponto $(L, 0)$, isto é,

$$f(2L - t) = -f(t), \quad \text{para todo } t \in [0, L],$$

como $\cos \frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (veja a Figura 2.22), então o produto $f(t) \cos \frac{2k\pi t}{2L}$ é simétrico em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ e como $\cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ (veja a Figura 2.22), então o produto $f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}$ é simétrica em relação à reta $t = L$ (verifique!).

Indice ímpar $\int_0^{2L} h(t)dt = 0.$

Indice par $\int_0^{2L} h(t)dt = 2\int_0^{L} h(t)dt.$

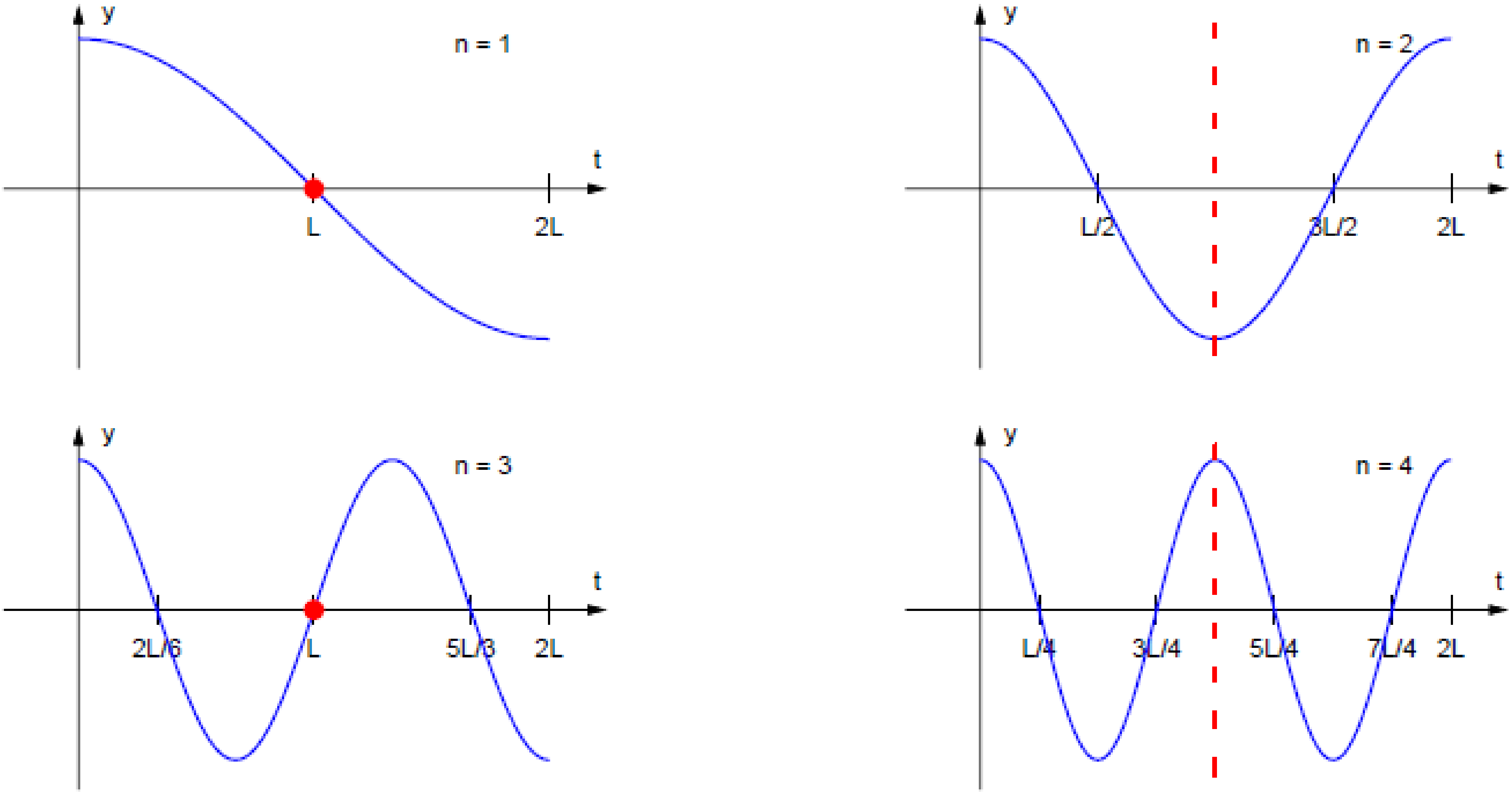


Figura 2.22 – $\cos\frac{n\pi t}{2L}$, para $n = 1, 2, 3, 4$

Separando os coeficientes em de índice par e de índice ímpar e usando as relações (2.19) e (2.20) obtemos que:

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= 0 \\
a_{2k+1} &= \frac{4}{2L}\int_0^L f(t)\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}dt \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

E assim

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0,2L)$$

Ou seja, se uma função $f : [0,2L] \to \mathbb{R}$ é simétrica em relação ao ponto $(L,0)$, a sua série de Fourier de cossenos tem somente os termos de índice ímpar.
Para as funções f que são definidas apenas em $[0,L]$ podemos prolongá-las ao intervalo $[0,2L]$ de forma que elas sejam simétricas em relação ao ponto $(L,0)$, ou seja,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t < L \\ -f(2L-t), & \text{se } L \le t < 2L \end{cases}$$

é simétrica em relação ao ponto $(L,0)$. E assim temos o seguinte resultado.

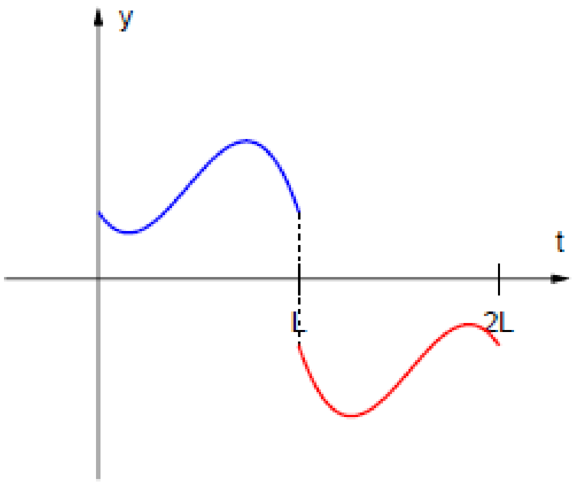


Figura 2.23 – Prolongamento com simetria em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$ de uma função definida inicialmente somente no intervalo $[0, L]$

Corolário 2.10. *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes. A série de Fourier de cossenos de índice ímpar de f*

$$Sci_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L},$$

em que

$$a_{2k+1} = \frac{4}{2L} \int_0^L f(t) \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L} dt \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para f nos pontos do intervalo $(0, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de cossenos de Fourier de índice ímpar:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in (0, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Além disso, se $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \le t < L, \\ -f(2L - t), & \text{se } L \le t < 2L, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t), \text{ se } -2L \le t < 0, \quad \tilde{f}(t + 4L) = \tilde{f}(t),$$

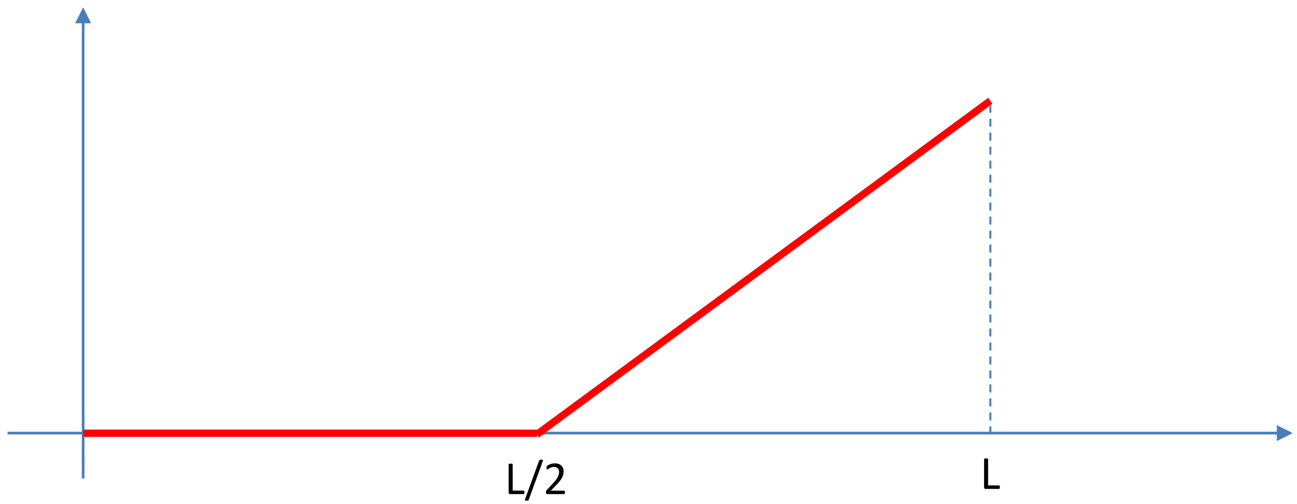
ou seja, $\tilde{f}$ é a extensão de f que é periódica de período $4L$, par e simétrica em relação ao ponto $(t, y) = (L, 0)$, então

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } \tilde{f} \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.12. Determine as representações da função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ em termos das séries de Fourier de senos e de cossenos de índices ímpares:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < L/2, \\ t - L/2, & \text{se } L/2 \leq t < L, \end{cases}$$

MAP2320



Se considerarmos o intervalo [-2L,2L] os valores de c e d são respectivamente 1/4 e 1/2

A combinação linear para os coeficientes é dada por:

Referente ao intervalo [-2L,2L]

$$c_n = 4 * \left[c_n\left(f^{(1)}_{1/4,1/2}, 2L \right) - L/2 * c_n\left(f^{(0)}_{1/4,1/2}, 2L \right) \right]$$

Série de índices ímpares

Linear no intervalo [1/2,1] em [-L,L] que equivale a [1/4,1/2] em [-2L,2L]

constante no intervalo [1/2,1] em [-L,L] que equivale a [1/4,1/2] em [-2L,2L]

Coeficientes das séries de cossenos de índice ímpar

Atenção para a escolha do c,d adequados !

$[0, 2L]$:

n

$$
\begin{aligned}
a_{2k+1} &= a_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) - \frac{L}{2} a_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) \\
&= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2} (s \operatorname{sen} s + \cos s) \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right) + \frac{2L}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
f(t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4\left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} \right)}{(2k+1)^2\pi} + \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2L}
$$

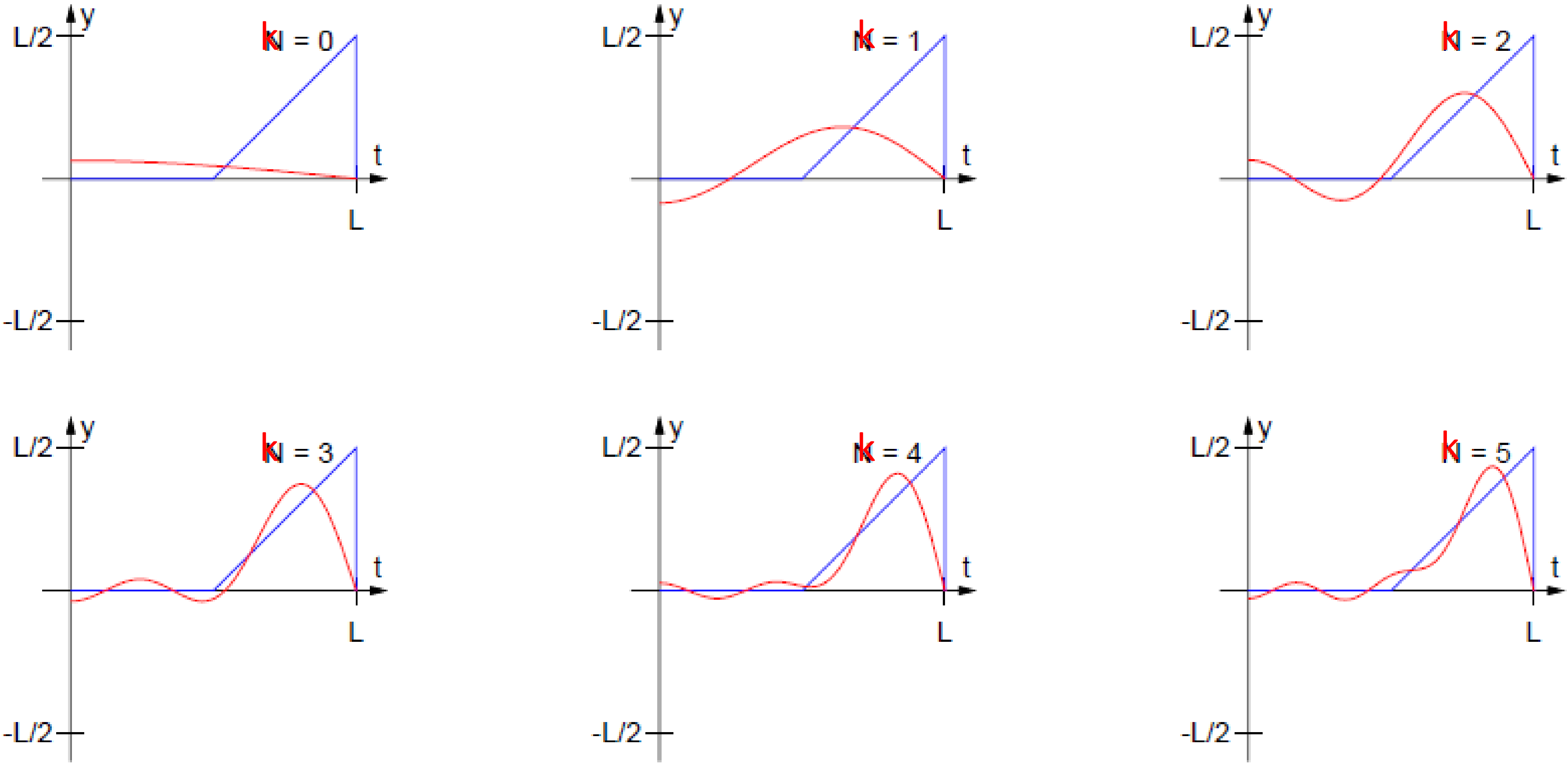


Figura 2.24 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de cossenos de índices ímpares, para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Coeficientes das séries de senos de índice ímpar

Atenção para a escolha do c,d adequado !

n

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= b_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) - \frac{L}{2} b_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 2L) \\
&= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi}\cos s\Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{2L}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)}{(2k+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)}\right]\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{2L}$$

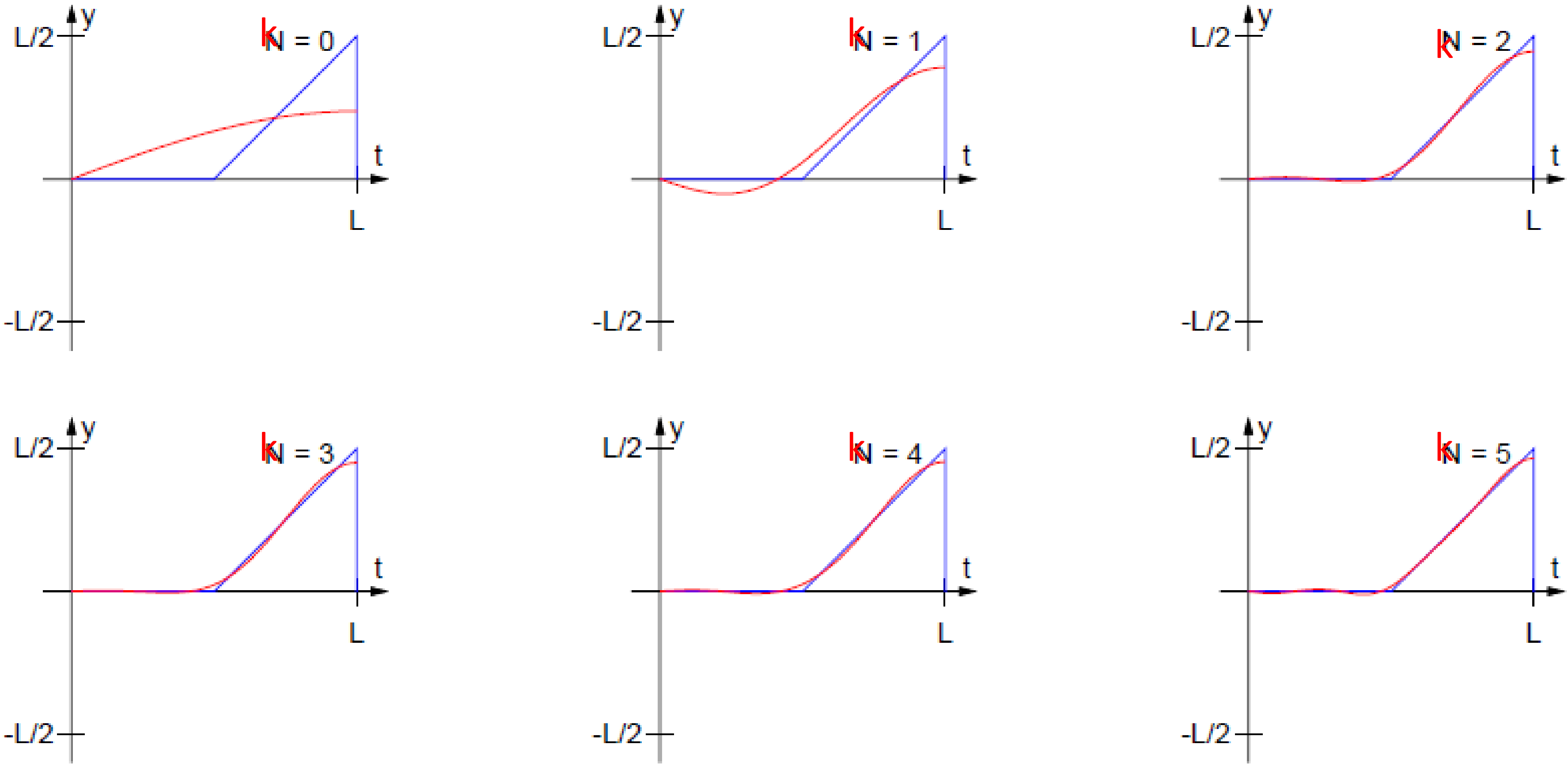


Figura 2.25 – A função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t - L/2$, se $t \in [L/2, L]$ e $f(t) = 0$, caso contrário e as somas parciais da sua série de Fourier de senos de índices ímpares, para ~~N~~ k $= 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

MAP2320

Exemplo 3.4. Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $\alpha = 1$, a extremidade da esquerda mantida a temperatura zero e extremidade da direita isolada, ou seja,

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0$$

e tal que a temperatura inicial é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x < 20 \\ x - 20, & \text{se } 20 \le x \le 40 \end{cases}$$

Temos que resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < 40 \\ u(0,t) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(40,t) = 0 \end{cases}$$

A solução é então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{80} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{6400} t}$$

em que c_n são os coeficientes da série de senos de índice ímpar de $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_{2k+1} &= 4\left(b_{2k+1}(f^{(1)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 80) - 20 b_{2k+1}(f^{(0)}_{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}, 80)\right) \\
&= 4 \cdot \frac{2L}{(2k+1)^2\pi^2}(-s\cos s + \operatorname{sen} s)\Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} - \frac{L}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-1}{(2k+1)\pi} \cos s \Big|_{\frac{(2k+1)\pi}{4}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\
&= \frac{8L}{(2k+1)^2\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) - \frac{2L}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

Portanto a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4\left(\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{4}\right)}{(2k+1)^2\pi} - \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)} \right] \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi t}{80} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{6400} t}.$$

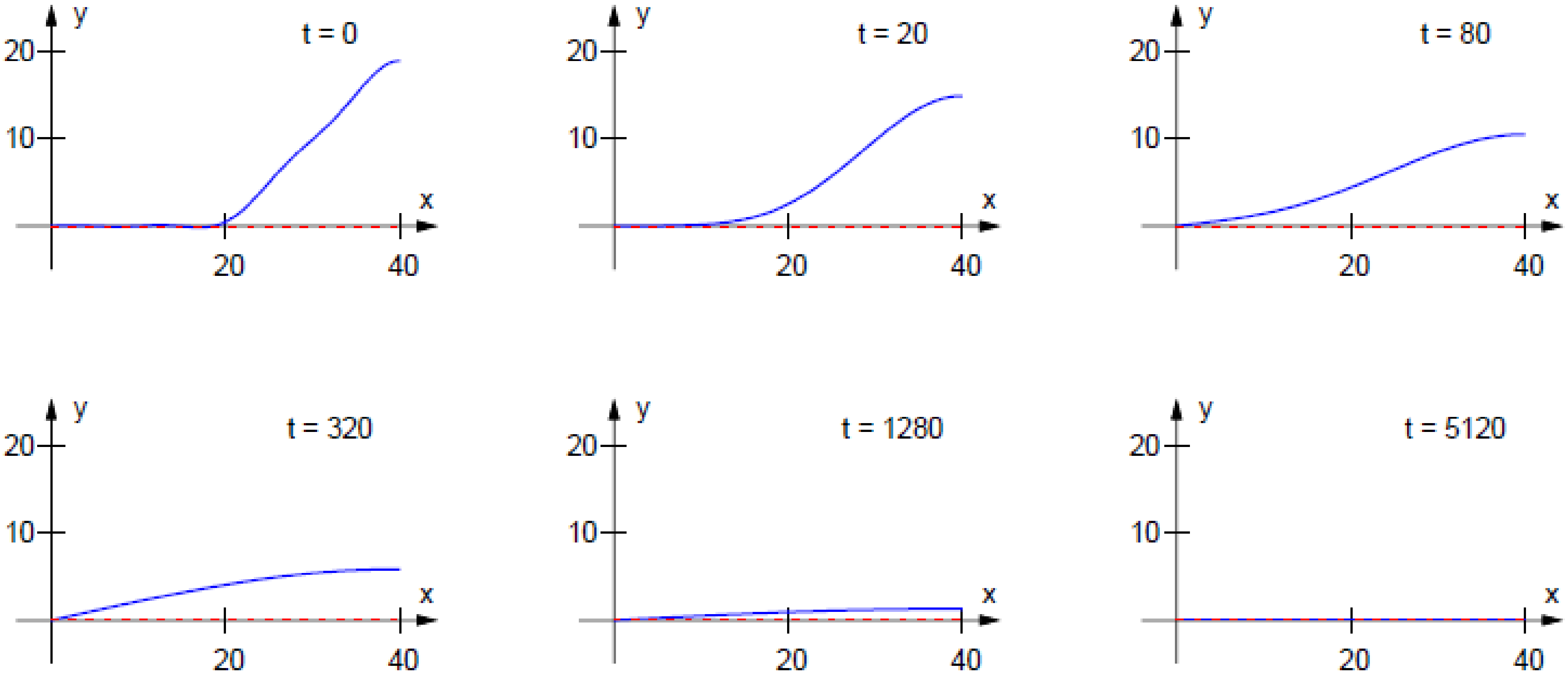


Figura 3.4 – Solução, $u(x,t)$, do PVIF do Exemplo 3.4 tomando apenas 6 termos não nulos da série.

Exercício

3.2. Resolva o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que corresponde ao problema do calor em uma barra de comprimento L que do lado esquerdo está mantida a temperatura fixa T_1 e do lado direito é mantida isolada.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = T_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \end{cases}$$

Utilize a soma de uma solução em regime permanente e uma solução transiente

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Dirichlet
não-homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

Problema Homogêneo
C.C. de Neumann
homogêneas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Homogêneo
C.C. de Mistas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

Problema Não-Homogêneo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)$$
$$u(x,0) = f(x),\ 0 < x < L$$
$$u(0,t) = T_1,\ u(L,t) = T_2$$

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- **Equação do calor transiente (parabólica)**
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)