4.4 Soluções

4.4.1 Soluções dos exercícios sobre variáveis aleatórias de Bernoulli

Solução do Exc. 48 é idêntica aos argumentos do Exemplo 42. A única diferença é que o exemplo trata variáveis de Bernoulli cujo parâmetro $p = 0,7$, enquanto que no presente exercício $p = 0,8$.

Solução do Exc. 49. O fenómeno ao qual o presente exercício tenta atrair sua atenção é que $X_1 + X_1$ é diferente de $X_1 + X_2$ onde X_2 tem a mesma distribuição que X_1 mas é independente de X_1. Abaixo, vou apresentar tudo em detalhes.

Seja então X_1 uma variável aleatória Bernoulli$(0,2)$. Vamos introduzir variável aleatória Y como $2X_1$. Você definitivamente não encontra nenhuma dificuldade no cálculo da distribuição de Y, pois tal cálculo foi lhe explicado e justificado no Capítulo 3, naquela sua parte onde falava-se sobre transformações de variáveis aleatórias. No caso de Y, a transformação é "multimplicação por 2", e de acordo com o ensinado, a distribuição de Y obtem-se por multiplicação por 2 dos valores de X_1, sendo que as probabilidades ficam intactas. O resultado está abaixo:

y	0	2
$\mathbb{P}[Y = y]$	$0,8$	$0,2$

Até o momento, tudo está certo. O probelma aparece se a gente escrever Y da seguinte maneira que é totalmente equivalente à escrita $2X_1$, eis esta: $Y = X_1 + X_1$. O problema supracitado aparece no processo de cálculo da distribuição de Y seguindo a regra do cálculo da distribuição de soma. Vou primeiramente mostrar a abordagem correta e depois a equivocada, que é aquela que leva ao problema. Na minha exposição, o primeiro passo é a construção da tabela de distribuição conjunta das variáveis cuja soma dá Y. Eis esta:

X_1 \ X_1	0	1
0	$0,8$	0
1	0	$0,2$

No segundo passo, se faz as somas de todos os pares de valores:

y	$\mathbf{0}+0$	$\mathbf{0}+1$	$\mathbf{1}+0$	$\mathbf{1}+1$
$\mathbb{P}[Y = y]$	$0,8$	0	0	$0,2$

No terceiro passo, que é o passo final, eliminam-se as colunas cujas probabilidades são nulas. O resultado final é a tabela que foi derivada no parágrafo acima pela aplicação do raciocínio que enxergava Y como $2X_1$.

Então, mostrei para você que o cálculo da distribuição de Y leva ao mesmo resultado queira você enxergar Y como $2X_1$, ou queira você enxergar ela como $X_1 + X_1$. A coincidência mostrada é importante para você ganhar a confiança de que os métodos até o momento ensinados funcionam sem falhas (pois na ausência dessa coincidência, você suspeitaria ou nas falhas de ensino ou nas falhas de sua aprendizagem). O que talvez ficou ainda estranho para você é a construção da tabela de distribuição conjunta que foi usada para o cálculo de $X_1 + X_1$. Vou fazer comentários apropriados abaixo.

Muitos mistérios ao redor da tabela serão naturalmente explicadas se nós esclarecermos para nós mesmo quem são o "par" de variáveis envolvidas na tablea. A resposta é direta: É X_1 e X_1, quer dizer, X_1 e ela mesma. Isto significa que se X_1 assumiu valor 0 (ou 1), então "ela mesma" é obrigada assumir 0 (respectivamente, 1). Isso explica a razão pela qual as celulas da tabela carregam probabilidades não nulas somente para os pares de valores $(0,0)$ e $(1,1)$. Ainda mais, já que X_1 é Bernoulli$(0,2)$ então $0,2$ deve ser a probabilidade dela, junto com a cópia dela, assumir o par $(1,1)$, e pelo mesma razaõ, $0,8$ deve ser a probabilidade da tabela na celula correspondente ao par $(0,0)$. Isso tudo justificou a construção da tabela como foi feita acima. Só talvez vale notar que os argumentos agora usados sugerem que seja inadequado o uso de negrito na marcação de valores de uma de X_1. A razão é que na situação aqui considerada, não há "outra" X_1 e, portanto, não há outro valor, seja esse 0 ou seja 1, que é diferente do valor da "primeira" X_1. Apesar disso, eu prefiro deixar a marcação em negrito, pois ela indica a regra pela qual a tabela bi-variada gera a tabela feita no segundo passo.

A situação muda-se drasticamente quando eu desejar achar Z que eu defino como $X_1 + X_2$ sendo que sobre X_2 eu declaro que ela tem a <u>mesma</u> distribuição que X_1 mas é <u>independente</u> de X_1. Nesse caso, a tabela da distribuição conjunto de X_1 e X_2 faz-se seguindo a regra ilustrada no Exemplo 42 (que usa essencialmente a independência entre X_1 e X_2). Eis a tabela:

X_1 / X_2	0	1
0	$(0,8)^2$	$0,8 \cdot 0,2$
1	$0,2 \cdot 0,8$	$(0,2)^2$

y	$\mathbb{P}[X_2 = y]$
0	0,8
1	0,2

x	0	1
$\mathbb{P}[X_1 = x]$	0,8	0,2

Observe que a tabela agora construída difere-se completamente da tabela da distribuição "conjunta" de X_1 com ela mesma. A peartir da útlima tabela, é facil obter a distribuição de Z (recorde, Z foi definida como $X_1 + X_2$). Quanto à comparação entre as esperanças e entre as variâncias de Y e de Z, as contas são obrigadas a dar $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z]$. A razão dessa igualdade adveio dos seguintes cálculos (que empregam as propriedades genéricas da esperança): $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[2X_1] = 2\mathbb{E}[X_1]$ e $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 2\mathbb{E}[X_1]$ (na última passagem usa-se que $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2]$ o que se justifica pelo fato de X_1 e X_2 terem a mesma distribuição). Entretanto, Var$[Y]$ e Var$[Z]$ terão valores diferentes. Embora a diferença pode ser provada em forma genérica, é suficiente que você verifica-la fazendo as contas numéricas. É claro que nas suas contas você precisa partir das tabelas de distribuição de Y e de Z.