EXEMPLO: Sejam $L(x) = \{ d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_i(x)^T d = 0,\ i = 1,\dots,m;\ \nabla g_j(x)^T d \leq 0,\ j \in A(x) \}$ e

$$S(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) + \sum_{j \in A(x)} \mu_j \nabla g_j(x),\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \mu_j \geq 0 \}$$

MOSTRAR QUE $L(x)^\circ = S(x)$.

PASSO 1: $S(x)$ é convexo: $v_1, v_2 \in S(x)$ e $t \in [0,1]$ temos que

$v_1 = \sum \lambda_i^1 \nabla h_i + \sum \mu_j^1 \nabla g_j$ e $v_2 = \sum \lambda_i^2 \nabla h_i + \sum \mu_j^2 \nabla g_j$.

Logo $t v_1 + (1-t) v_2 = \sum \underbrace{t\lambda_i^1 + (1-t)\lambda_i^2}_{\in \mathbb{R}} \nabla h_i + \sum \underbrace{t\mu_j^1 + (1-t)\mu_j^2}_{\geq 0} \nabla g_j \in S(x)$

PASSO 2: $S(x)$ é fechado:

Seja $\{v_k\} \subset S(x)$ e $v_k \to v$. Mostrar que $v \in S(x)$. TEMOS QUE

$v_k = \sum \lambda_i^k \nabla h_i + \sum \mu_j^k \nabla g_j$, $\mu_j^k \geq 0$. Se $\{\nabla h_i\}_{i=1}^{m} \cup \{\nabla g_j\}_{j \in A(x)}$ é LD,

existem $(\alpha, \beta) \neq 0$ tq $\sum \alpha_i \nabla h_i + \sum \beta_j \nabla g_j = 0$, logo; $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ vale:

$$v_k = \sum (\underbrace{\lambda_i^k - \gamma \alpha_i}_{\tilde{\lambda}_i^k}) \nabla h_i + \sum (\underbrace{\mu_i^k - \gamma \beta_i}_{\tilde{\mu}_i^k}) \nabla g_i$$

Vamos escolher γ com $|\gamma|$ pequeno o suficiente tal que pelo menos um dos coeficientes $\tilde{\lambda}_i^k$, $\tilde{\mu}_i^k$ se anula mantendo o sinal $\tilde{\mu}_i^k \geq 0$.

PODEMOS REPETIR O PROCESSO ATÉ OBTERMOS:

$$v_k = \sum_{i \in I^k} \tilde{\lambda}_i^k \nabla h_i + \sum_{j \in J^k} \tilde{\mu}_j^k \nabla g_j,\ \tilde{\mu}_j^k \geq 0 \text{ e } \{\nabla h_i\}_{i \in I_k} \cup \{\nabla g_j\}_{j \in J_k}$$

LI.

SEM PERDA DE GENERALIDADE PODEMOS TOMAR UMA SUBSEQUÊNCIA TAL QUE $I^k \equiv I \subseteq \{1,\dots,m\}$ e $J^k \equiv J \subseteq A(x)$ (POR QUE?).

ASSIM $v_K = A\, y_K$, onde $A = [\nabla h_i, i \in I ; \nabla g_j, j \in J]$ e $y_K = (\tilde{\lambda}_K, \tilde{\mu}_K), \tilde{\mu}_K \geq 0$.

onde A tem posto coluna completo, isto é, A^T é injetiva $(\ker(A^T) = \{0\})$.

então $v_K = A y_K \iff A^T v_K = A^T A y_K \iff y_K = (A^T A)^{-1} A^T v_K$

NOTE QUE $A^T A$ é inversível (POR QUE?)

Como $v_K \to v$ temos que $y_K \to \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T v}_{y}$. Como $y_K = (\tilde{\lambda}_K, \tilde{\mu}_K)$, $\tilde{\mu}_K \geq 0$

vale também que $y = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$, $\tilde{\mu} \geq 0$.

Mas $y = (A^T A)^{-1} A^T v \iff v = Ay$, logo $v \in S$

PASSO 3: TEMOS QUE $(S^\circ)^\circ = S$, pois S é fechado e convexo.

resta provar que $S^\circ = L$.

Seja $d \in S^\circ$, ie $\langle d, v \rangle \leq 0$, $\forall v \in S$, em particular, como $\nabla h_i, -\nabla h_i, \nabla g_j \in S, \forall i, \forall j$

temos que $\nabla h_i^T d = 0 \; \forall i = 1, \dots, m$ e $\nabla g_j^T d \leq 0$, $j \in A(x) \Rightarrow d \in L$.

Reciprocamente: Seja $d \in L$ ie, $\nabla h_i^T d = 0 \; \forall i$ e $\nabla g_j^T d \leq 0 \; \forall j$. Logo, para

todo $v \in S$, ie, $v = \sum \lambda_i \nabla h_i + \sum \mu_j \nabla g_j$ temos $\langle v, d \rangle = \sum \lambda_i \underbrace{\nabla h_i^T d}_{=0} + \sum \underbrace{\mu_j}_{\geq 0} \underbrace{\nabla g_j^T d}_{\leq 0} \leq 0$.

Logo $d \in S^\circ$.

O cálculo pelo Lema de Farkas é bem mais imediato:

MOSTRAR QUE $L^0 = S$.

Seja $v \in S$, então $v = \sum_i \lambda_i \nabla h_i + \sum_j \mu_j \nabla g_j$, $\mu_j \geq 0$

Vamos provar que $\langle v, d \rangle \leq 0$, $\forall d \in L$. Fixo $d \in L$, ie, $\nabla h_i^T d = 0, \forall i$
$\nabla g_j^T d \leq 0, \forall j$

$$\langle v, d \rangle = \langle A^T \binom{\lambda}{\mu}, d \rangle = \langle \binom{\lambda}{\mu}, Ad \rangle = \sum_j \underbrace{\mu_j}_{\geq 0} \underbrace{\nabla g_j^T d}_{\leq 0} \leq 0. \Rightarrow v \in L^0.$$

onde $A = \begin{bmatrix} - \nabla h_i^T - \\ - \nabla g_j^T - \end{bmatrix}$

Reciprocamente, seja $v \in L^0$, então $\langle v, d \rangle \leq 0$, $\forall d \in L$, isto é, não existe d tal que $\langle v, d \rangle > 0$ e $\nabla h_i^T d = 0, \forall i$
$\nabla g_j^T d \leq 0, \forall j$.

Pelo Lema de Farkas, existe (λ, μ) tal que $v = \sum_i \lambda_i \nabla h_i + \sum_j \mu_j \nabla g_j$
$\mu_j \geq 0$, $\forall j$,

isto é, $v \in S$ ∎