Capítulo 2

Variáveis Aleatórias Discretas (Capítulo 2)

1.1 Conceito de Variável Aleatória

Definição 1.1.1 *Uma variável aleatória é uma função que associa um número real a cada elemento de* Ω.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

1.2 Funções de Variável Aleatória

Quando realizamos um experimento aleatório, é comum nos interessarmos em uma função $g(X)$ de uma variável aleatória X. Ou melhor, em muitos casos é comum o nosso interesse estar na distribuição de probabilidade de uma função de uma variável aleatória. Portanto, nesta seção veremos como determinar a distribuição de probabilidade de uma função de v.a.

Exemplo 1.2.1 *Seja* $Y = g(X) = (1,8)X + 32$ *uma função linear da variável aleatória* X*. Temos que,* X *representa a temperatura de um ambiente em graus Celsius e* Y *representa a mesma temperatura, só que na escala Fahrenheit.*

Se X for uma v.a discreta com distribuição de massa de probabilidade p_X, e Y uma função de X, a sua distribuição de probabilidade pode ser calculada pela distribuição de probabilidade de X. Em particular, para obter $p_Y(y)$ para qualquer valor de y, somamos as probabilidades de todos os valores de x tal que $g(x) = y$:

$$p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x).$$

Exemplo 1.2.2 *Seja X uma variável aleatória que assume os valores $\{-1, 0, 1\}$ com as seguintes probabilidades:*

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3 & se \quad x = -1 \\ 1/6 & se \quad x = 0 \\ 1/2 & se \quad x = 1. \end{cases}$$

Vamos encontrar, $p_Y(y)$ para $Y = 2X + 1$.

1° passo: *Que valores Y assume?*

$$Para\ X = -1: \ Y = 2(-1) + 1 = -1.$$

$$Para\ X = 0: \ Y = 2(0) + 1 = 1.$$

$$Para\ X = 1: \ Y = 2(1) + 1 = 3.$$

Logo,

$$I_Y = \{-1, 1, 3\}.$$

2° passo: *Com que probabilidades Y assume esses valores? Ou seja, qual a distribuição de massa de probabilidade de Y?*

Temos que

$$p_Y(-1) = \mathbb{P}(\{Y = -1\}) = \mathbb{P}(\{X = -1\}) = p_X(-1) = 1/3.$$

$$p_Y(1) = \mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) = p_X(0) = 1/6.$$

$$p_Y(3) = \mathbb{P}(\{Y = 3\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) = p_X(1) = 1/2.$$

3° passo: *Verificar se o somatório das probabilidades de Y é igual a 1:*

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_Y(-1) + p_Y(1) + p_Y(3) \\ &= 1/3 + 1/6 + 1/2 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a distribuição de massa de probabilidade de Y é definida por

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/3 & se \quad y = -1 \\ 1/6 & se \quad y = 1 \\ 1/2 & se \quad y = 3. \end{cases}$$

Exemplo 1.2.3 *Considere a mesma variável aleatória, X, do exemplo 1.2.2.*

Vamos agora encontrar $p_Y(y)$, tal que $Y = X^2$.

1° passo: *Que valores Y assume?*

$$Para\ X = -1: \ Y = (-1)^2 = 1.$$

$$Para\ X = 0: \ Y = (0)^2 = 0.$$

$$Para\ X = 1: \ Y = (1)^2 = 1.$$

Então,

$$I_Y = \{0, 1\}.$$

2° passo: *Qual a distribuição de massa de probabiliddade de Y?*

Temos que

$$p_Y(0) = \mathbb{P}(\{Y = 0\} = \mathbb{P}(\{X = 0\}) = p_X(0) = 1/6.$$

$$p_Y(1) = \mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) = p_X(-1) + p_X(1) = 1/3 + 1/2 = 5/6.$$

3° passo: *Verificar se o somatório das probabilidades de Y é igual a 1:*

$$p_Y(y) = p_Y(0) + p_Y(1) = 1/6 + 5/6 = 1.$$

Logo, a distribuição de massa de probabilidade de Y é:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/6 & se \quad y = 0 \\ 5/6 & se \quad y = 1. \end{cases}$$

1.3 Esperança e Variância

1.3.1 Esperança

A distribuição de massa de probabilidade de uma variável aleatória X nos fornece uma série de números, os quais são as probabilidades de ocorrência de cada um dos possíveis valores de X. Seria interessante resumir essa informação em um único número representativo. Para encontrar esse número introduzimos o conceito de esperança de X, valor esperado ou média. A esperança de X, é a média ponderada dos valores assumidos por X, onde a ponderação dos valores é feita pelos $p_X(x)'s$.

Definição 1.3.1 *(Esperança de uma v.a X ou seu valor esperado, ou sua média).*

O valor esperado de uma variável aleatória X, com distribuição de massa de probabilidade p_X, é definido por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x p_X(x).$$

Exemplo 1.3.1 *Vamos considerar novamente o lançamento de um dado honesto. Seja X a v.a, que assume os resultados do lançamento, vamos encontrar a distribuição de probabilidade e a esperança de X.*

1. *Distribuição de probabilidade:*

   Temos que
   $$I_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
   Como o dado é honesto, a probabilidade de sair qualquer número é a mesma, isto é
   $$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = 1/6.$$

2. *Esperança de X.*

   Temos que,
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x\mathbb{P}(X = x).$$
   Portanto,
   $$\mathbb{E}(X) = (1)1/6 + (2)1/6 + (3)1/6 + (4)1/6 + (5)1/6 + (6)1/6 = 3,5.$$

Exemplo 1.3.2 *Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. A esfera será produzida na fábrica A, enquanto que a produção do cilindro será feita na fábrica B.*

No setor de montagem será feita a junção e a pintura das peças. Cada cilindro e cada esfera terão, respectivamente, um comprimento e uma espessura determinada.

O empresário quer estudar a viabilidade de seu emprendimento, mais precisamente, quer ter uma idéia da distribuição do lucro por peça montada.

Características das peças:

Cilindro (comprimento)	*Esfera (espessura)*
Bom (B) (dentro das especificações)	*Boa (B) (dento das especificações)*
Longo (L) (maior que as especificações)	*Longa (L) (maior que as especificações)*
Curto (C) (menor que as especificações)	*Curta (C) (menor que as especificações)*

A seguir, temos as probabilidades do comprimento dos cilindros e da espessura das esferas de cada produto.

Produto	*Cilindro*	*Esfera*
B	0.80	0.70
L	0.10	0.20
C	0.10	0.10

O preço de cada componente do produto será 5 reais. Se algum componente apresentar a característica curto (C) depois de montadado o produto, o conjunto todo será vendido como sucata ao preço de 5 reais.

Cada componente longo (L) *poderá ser recuperado ao preço de* 5 *reais.*

Pergunta 1: *Se o preço de venda de cada unidade for de* 25 *reais, como seria a distribuição de probabilidade da v.a* X*: lucro por conjunto montado?*

Como os componentes vem de fábricas diferentes, vamos supor que a classificação dos cilindros e das esferas, segundo suas características, sejam eventos independentes.

Sabemos que:

$$\Omega = \{BB, BL, LB, BC, CB, LL, CC, LC, CL\}.$$

Considerando os seguintes eventos:

$$A_1 = \text{ cilindro bom } = \{BB, BL, BC\} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = 0.8.$$

$$B_1 = \text{ esfera boa } = \{BB, LB, CB\} \Rightarrow \mathbb{P}(B_1) = 0.7.$$

$$B_2 = \text{ esfera longa } = \{BL, LL, CL\} \Rightarrow \mathbb{P}(B_2) = 0.2.$$

Obtemos,

$$A_1 \cap B_1 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\{B, B\}) = (0.8)(0.7) = 0.56.$$

$$A_1 \cap B_2 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\{B, B\}) = (0.2)(0.8) = 0.16.$$

A seguir temos a probabilidade de todos os produtos do espaço amostral e seus respectivos lucros:

Produto	*Probabilidade*	*Lucro por montagem* (X)
BB	0.56	$25 - 10 = 15$
BL	0.16	$25 - 15 = 10$
BC	0.08	$5 - 10 = -5$
LB	0.07	$25 - 15 = 10$
LL	0.02	$25 - 20 = 5$
LC	0.01	$5 - 10 = -5$
CB	0.07	$5 - 10 = -5$
CL	0.02	$5 - 10 = -5$
CC	0.01	$5 - 10 = -5$

Vemos facilmente que a v.a X *pode assumir os seguintes resultados:*

$$I_X = \{15, 10, 5, -5\}.$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 15) &= \mathbb{P}(\{BB\}) = 0.56. \\
\mathbb{P}(X = 10) &= \mathbb{P}(\{BL, LB\}) = \mathbb{P}(\{BL\}) + \mathbb{P}(\{LB\}) = 0.16 + 0.07 = 0.23. \\
\mathbb{P}(X = 5) &= \mathbb{P}(\{LL\}) = 0.02. \\
\mathbb{P}(X = -5) &= \mathbb{P}(\{BC, CB, CL, LC, CC\}) \\
&= \mathbb{P}(\{BC\}) + \mathbb{P}(\{CB\}) + \mathbb{P}(\{CL\}) + \mathbb{P}(\{LC\}) + \mathbb{P}(\{CC\}) \\
&= 0.08 + 0.01 + 0.07 + 0.02 + 0.01 = 0.19.
\end{aligned}$$

Assim a distribuição de probabilidade da v.a X, lucro por conjunto montado, é definida por:

x	$\mathbb{P}(X = x)$
15	0.56
10	0.23
5	0.02
-5	0.19

Pelos resultados obtidos, concluímos que a probabilidade do lucro ser igual a 15*, quando o preço de venda de cada produto é de 25 reais, é superior a* 50%*.*

Pergunta 2: *Qual o lucro médio por conjunto montado, ou seja, qual é a $\mathbb{E}(X)$?*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 15\mathbb{P}(X = 15) + 10\mathbb{P}(X = 10) + 5\mathbb{P}(X = 5) + (-5)\mathbb{P}(X = -5) \\
&= 15(0.56) + 10(0.23) + 5(0.02) - 5(0.19) = 9,85.
\end{aligned}$$

Portanto, o lucro médio obtido de cada conjunto montado é de 9,85 reais.

1.3.2 Esperança para funções de variáveis aleatórias

Seja X uma variável aleatória com distribuição de massa de probabilidade p_X, e seja $g(X)$ uma função de X. Então, o valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é definido por:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\ p_X(x).$$

Para verificar que isto é verdade, vamos supor que $Y = g(X)$ e usar a fórmula apresentada anteriormente:

$$p_Y(y) = \sum_{\{x | g(x) = y\}} p_X(x).$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \mathbb{E}(Y) = \sum_y y\ p_Y(y) = \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\
&= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y\ p_X(x) = \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x)p_X(x) \\
&= \sum_x g(x)p_X(x).
\end{aligned}$$

O que prova a definição anterior.

A partir da definição de esperança para funções de variáveis aleatórias, vamos agora obter propriedades da esperança:

Assumindo Y, como uma função linear da variável aleatória X, isto é,

$$Y = aX + b,$$

tal que $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar a seguinte propriedade:

1. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Prova:

1. $$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + b) = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Seja b uma constante, temos que $\mathbb{E}(b) = b$. (Como vc provaria essa afirmação?)

1.3.3 Variância

Um outro importante número associado à variável aleatória X é a variância, que é denotada por $Var(X)$ e é definida como valor esperado da v.a $(X - \mathbb{E}(X))^2$, isto é,

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Como $(X - \mathbb{E}(X))^2$ só assume valores positivos, observamos que $Var(X)$ é sempre um número positivo.

Exemplo 1.3.3 *Voltando ao exemplo 1.3.1, vamos agora calcular a variância de X.*

Temos que

$$Var(X) = \sum_{x=1}^{6} (x - \mathbb{E}(X))^2 p_X(x).$$

Tomamos $\mathbb{E}(X) = 3.5$, então:

$$Var(X) = (1 - 3.5)^2(1/6) + (2 - 3.5)^2(1/6) + ... + (6 - 3.5)^2(1/6) \simeq 3.$$

A variância representa uma medida de dispersão de X em torno da sua média. Outra medida de dispersão é o desvio-padrão de X, que é definido como a raiz quadrada da variância, denotado por σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

O desvio-padrão é muitas vezes mais fácil de ser interpretrado, porque ele apresenta as mesmas unidades de X. Por exemplo, se a unidade de medida de X for metro, então a unidade do desvio-padrão também será metro, enquanto que a unidade de medida da variância será metro quadrado.

Desenvolvendo o quadrado da fórmula da variância de X, encontramos uma outra maneira de calcular a $Var(X)$:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Esta expressão é verificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_x (X - \mathbb{E}(X))^2 p_X(x) \\
&= \sum_x (X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2) p_X(x) \\
&= \sum_x X^2 p_X(x) - \sum_x 2X\mathbb{E}(X) p_X(x) + \sum_x (\mathbb{E}(X))^2 p_X(x) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X) \sum_x X p_X(x) + (\mathbb{E}(X))^2 \sum_x p_X(x) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.
\end{aligned}$$

Esta nova fórmula, apresenta uma maior facilidade para o cálculo da variância. Uma outra forma de provar que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$ é a seguinte:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \\
&= \mathbb{E}\{X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + [\mathbb{E}(X)]^2\} \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.
\end{aligned}$$

Note que na terceira igualdade usamos o fato de $\mathbb{E}(X)$ ser uma constante.

A partir da definição de esperança para funções de variáveis aleatórias, vamos agora obter propriedades da variância:

Assumindo Y, como uma função linear da variável aleatória X, isto é,

$$Y = aX + b,$$

tal que $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar as seguintes propriedades:

1. $Var(Y) = Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Prova:

1.

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= \sum_x (aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2 p_X(x) \\
&= \sum_x (aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2 p_X(x) \\
&= \sum_x (a(X - \mathbb{E}(X)))^2 p_X(x) \\
&= a^2 \sum_x (X - \mathbb{E}(X))^2 p_X(x) \\
&= a^2 Var(X).
\end{aligned}$$

Podemos observar que nestes resultados está implícita a propriedade: Seja a uma constante, temos que $Var(a) = 0$.

1.4 Esperança e Variância das Variáveis Aleatórias Bernoulli, Binomial e Geométrica:

1.4.1 Esperança e Variância - Bernoulli:

Se X tiver distribuição de Bernoulli, então

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ e } Var(X) = p(1 - p).$$

Prova:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{1} x\ p_X(x) = 0(1 - p) + 1(p) = p,$$

e também,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2\ p_X(x) = (0)^2 p + (1)^2 p = p.$$

Então como $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (E(X))^2$, temos que

$$Var(X) = p - p^2 = p(1 - p).$$

Por causa da sua simplicidade, uma v.a de Bernoulli é muito importante no dia-a-dia. Ela é usada para modelar situações onde há apenas dois eventos, tais como:

- A situação de uma linha telefônica: Está ocupada ou não.

- O estado médico de um paciente: Está com determinada doença ou está saudável.
- A tendência política de uma pessoa: Está a favor ou contra determinado candidato.

Se combinarmos várias v.a's de Bernoulli podemos construir variáveis aleatórias mais complicadas, como é o caso da variável aleatória binomial, que veremos a seguir.

Esperança e Variância da Binomial:

Se X tiver distribuição Binomial, vamos provar que

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ e } Var(X) = np(1-p).$$

Vamos verificar?

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\, p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\, \frac{n!}{(n-k)!k!}\, p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!}\, p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\, p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}\, p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}\, p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^{k-1}(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Tomando, $l = k-1$, temos nos índices da somatória que: $k = n$ corresponde a $l = n-1$ e $k = 1$ corresponde a $l = 1-1 = 0$, resultando em:

$$\mathbb{E}(X) = np \sum_{l=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ l \end{pmatrix} p^l(1-p)^{(n-1)-l}.$$

De acordo com a definição de distribuição de probabilidade de uma v.a binomial,

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = 1.$$

Portanto, a partir da expressão acima, temos que

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Agora temos que encontrar $\mathbb{E}(X^2)$ para obter $Var(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{n} k^2 \; p_X(k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [k(k-1)+k] \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \; p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n.(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \; p^2 p^{x-2} q^{n-k} + \; np \\
&= n.(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \; p^{k-2} q^{n-k} + \; np.
\end{aligned}$$

Tomando agora , $l = k-2$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= n.(n-1)p^2 \sum_{l=2}^{n-2} \begin{pmatrix} n-2 \\ l \end{pmatrix} p^l q^{n-2-l} + \; np \\
&= n(n-1)p^2 + \; np.
\end{aligned}$$

Finalmente encontramos $Var(X)$:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (E(X))^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= n(np^2 - p^2 + p - np^2) \\
&= np(np - p + 1 - np) \\
&= np(1-p).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.1 *Seja* $Y = 3X + 2$ *uma variável aleatória binomial de parâmetros* $n = 20$ *e* $p = 0.3$*, encontre:*

(a) $\mathbb{E}(Y)$.

Como vimos anteriormente, $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$*, assim nesse caso podemos observar que* $a = 3$ *e* $b = 2$*, logo:*

$$\mathbb{E}(3X + 2) = \mathbb{E}(3X) + \mathbb{E}(2) = 3\mathbb{E}(X) + 2.$$

Temos que $\mathbb{E}(X) = np$*. Então*

$$\mathbb{E}(3X + 2) = 3(np) + 2 = 3(20)(0.3) + 2 = 20.$$

(b) $Var(Y)$.

Sabemos que $Var(aX+b) = a^2Var(X)$, *então*

$$Var(Y) = Var(3X+2) = Var(3X) + Var(2) = 3^2Var(X) + 0 = 9Var(X).$$

Sendo $Var(X) = np(1-p)$, *temos que*

$$Var(3X+2) = 9np(1-p) = 37,8.$$

Esperança e Variância:

Se X tiver distribuição Geométrica, vamos mostrar que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ e } Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemplo 1.4.2 *Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle de qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se* $0,02$ *é a probabilidade da peça ser defeituosa, deseja-se verificar o comportamento da variável, que representa a quantidade de peças boas produzidas antes da primeira defeituosa.*

Seja X *a variável aleatória geométrica que corresponde ao número de peças boas produzidas antes da primeira defeituosa. Então a probabilidade de a primeira peça ser defeituosa depois de* x *peças boas, é dada por:*

$$\mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1} = (0,02)(0,98)^{x-1}$$

Calcular $\mathbb{E}(X)$.

1.5 Exercícios

1. Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$. Considere que todos os eventos elementatares são equiprováveis. Definamos em Ω a seguinte variável aleatória:

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_5) = 5$$

$$X(\omega_4) = X(\omega_8) = 10$$

$$X(\omega_6) = X(\omega_7) = X(\omega_9) = 20$$

$$X(\omega_{10}) = 30$$

   (a) Determine a distribuição de massa de probabilidade de X.

   (b) Calcule $\mathbb{E}(X)$

(c) Calcule $\mathbb{E}(a \cdot X)$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Suponha um jogo infantil onde há a representação de uma estrada de 100km que liga a cidade B à cidade A. A estrada é tortuosa e está dividida em 100 quadradinhos de 1km. O jogo começa com todos os jogadores na cidade B. É escolhida uma ordem entre os jogadores, e cada um lança um dado honesto duas vezes, e de maneira independente. A soma dos resultados corresponde à distância que cada jogador percorrerá em cada rodada. Ganha aquele que chegar primeiro na cidade A.

   (a) Encontre Ω.

   Você concorda que os jogadores estão mais interessados na soma dos ressultados do lançamento do que com os elementos de Ω? Por isso, é interessante definir a variável aleatória S que associa a cada elemento de Ω a soma dos resultados dos lançamentos.

   (b) Encontre $\{S = 8\}$, $\{S = 12\}$.

   (c) Se o dado tivesse apenas 3 faces, como seria a distribuição de massa de probabilidade de S?

   (d) Para a mesma situação do item c, encontre $\mathbb{E}(S)$ e $Var(S)$.

3. Considere o espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e considere os eventos elementares equiprováveis. Seja X uma variável aleatória tal que

$$X(1) = X(2) = X(3) = X(5) = -1$$

$$X(4) = X(6) = 1.$$

   (a) Determine a distribuição de massa de probabilidade de X.

   (b) Calcule $\mathbb{E}(X)$.

   (c) Calcule $\mathbb{E}(a \cdot X + b)$, a e $b \in \mathbb{R}$.

   (d) Seja $Y = X^2$. Calcule $\mathbb{E}(Y)$.

4. Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. E sejam os eventos

$$(A - B) = \{1\}, \quad (B - A) = \{4,\ 6\}, \quad (A \cup B) = \{1, 3, 4, 6\}.$$

   Considere os eventos elementares equiprováveis.

   (a) Determine $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$.

   (b) Defina a seguinte variável aleatória

$$X(2) = X(4) = X(6) = 1$$

$$X(1) = X(3) = X(9) = -1.$$

   Encontre a distribuição de massa de probabilidade de X.

(c) Calcule $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$.

5. Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considere a variável aleatória X, com a seguinte distribuição de massa de probabilidade:

k	-1	0	1	2
$p_X(k)$	0.2	0.1	0.3	0.4

Para $\eta = 2^X$ encontre:

(a) $\mathbb{E}(\eta)$.

(b) $Var(\eta)$.

6. Seja X uma variável aleatória de Bernoulli que assume 1 com probabilidade p e 0 com probabilidade $1-p$.

(a) Encontre $\mathbb{E}(X)$.

(b) Encontre $Var(X)$.

7. Seja X uma variável aleatória de Bernoulli tal que

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p, \\ -1, & \text{com probabilidade } 1-p. \end{cases}$$

(a) Encontre $\mathbb{E}(X)$.

(b) Encontre $Var(X)$.

8. Num teste tipo certo/errado, com 50 questões, qual a probabilidade de que um aluno acerte 80% das questões, supondo que ele as responda ao acaso?

Orientação para resposta: Defina uma variável aleatória X. Quais valores ela assume? Qual sua distribuição de probabilidade?

9. Repita o exercício anterior, considerando cinco alternativas para cada questão.

10. Seja X uma v.a. Binomial com parâmetros $n = 20$ e $p = 3/4$. Encontre $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$ em função de n e p.

11. Nas 3 situações seguintes, calcule explicitamente a probabilidade pedida. Calcule a $\mathbb{E}(X)$ e a $Var(X)$.

(a) Uma moeda honesta é lançada 3 vezes. Qual a probabilidade de serem obtidas 2 caras?

Dica: Neste caso a v.a. X é o número de caras em 3 lançamentos. Então X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 3$ e $p = 1/2$.

(b) Um dado honesto é lançado cinco vezes. Qual é a probabilidade de se obter face 5 no máximo 3 vezes?

Dica: Neste caso a v.a. X é o número de vezes que aparece face 5 em 5 lançamentos. Então X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 5$ e $p = 1/6$. E a probabilidade que se quer calcular é $\mathbb{P}(X \leq 3)$.

(c) Dez peças são extraídas, ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças. Qual é a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas.

Dica: Neste caso a v.a. X é o número de peças defeituosas num lote de 10 peças. Então X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0,1$. E a probabilidade que se quer calcular é $\mathbb{P}(X = 10)$.

12. Acredita-se que 20% dos moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica tem alergia aos poluentes lançados ao ar. Admitindo que este percentual de alérgicos é real (correto), calcule a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia entre 13 selecionados ao acaso.

(a) **Orientação para resposta: Defina uma variável aleatória X. Quais valores ela assume? Qual sua distribuição de probabilidade?**

(b) **Um experimento fracasso/coroa (não ter alergia) e sucesso/cara (ter alergia) é repetido** 13 **vezes. Quer se saber qual a probabilidade de ocorrerem pelo menos** 4 **sucessos.**

(c) Vocês podem trocar essa associação entre fracasso e sucesso, mas tomem cuidado com as probabilidades delas ocorrerem.

13. Três em cada quatro alunos de uma universidade fizeram cursinho antes de prestar vestibular (**sucesso: "ter feito cursinho", que ocorre com probabilidade** $p = 3/4$. Se 16 (**repetições de um experimento sucesso/fracasso**) alunos são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que:

Orientação para resposta: Defina uma variável aleatória X. Quais valores ela assume? Qual sua distribuição de probabilidade?

(a) Pelo menos 12 tenham feito cursinho?

(b) No máximo 13 tenham feito cursinho?

(c) Exatamente 12 tenham feito cursinho?

14. Considere que você esteja numa situação difícil. Você vai assistir a aula de uma disciplina e descobre que o professor preparou uma prova surpresa. Agora você está diante de uma prova teste com 10 questões, cada uma com 4 alternativas equiprováveis, e somente uma correta, e está totalmente despreparada. Você sequer apareceu nas últimas aulas. Você não foi muito bem na primeira prova do curso, e sabe que se tirar 6 nessa prova você passa, caso contrário você vai ter que fazer a recuperação. Você decide responder às questões de maneira aleatória e de forma que a resposta de uma não influencie nas outras e vice-versa, ou seja de maneira independente.

    (a) Considere a seguinte varíavel aleatória: $R_i = 1$ se a i-ésima resposta for correta, e $R_i = 0$ se a i-ésima resposta não for correta. Encontre a distribuição de massa de probabilidade de R_i.

    (b) Encontre $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$.

15. **Experimento Aleatório:** Uma moeda honesta é lançada duas vezes. Seja $X(\omega)$ o número de ocorrências de caras.

    (a) Encontre Ω.

    (b) Encontre a distribuição de massa de probabilidade de X.

    (c) Encontre $\mathbb{E}(X)$.

    (d) Encontre $Var(X)$.