# Teste 2

**Questão 1** (1,0pt). Sejam $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x^2 - 12x + y^2 - 4y = \frac{-61}{4}\}$ e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função definida como $u(x,y) = x + y$. Encontre $p \in C$ tal que $u(p)$ assuma maior valor em $C$.

1. $p = (\frac{9}{4}, \frac{11}{4})$
2. $p = (-\frac{27}{4}, \frac{6}{4})$
3. $p = (\frac{13}{4}, \frac{14}{4})$
4. $p = (\frac{3}{2}, 2)$
5. não sei.

Primeiramente, observe que $C$ é uma elipse:

$$3x^2 - 12x + y^2 - 4y = -\frac{61}{4}$$

$$3(x-2)^2 = 3x^2 - 12x + 12$$
$$(y-2)^2 = y^2 - 4y + 4$$

$$3(x-2)^2 + (y-2)^2 - 12 - 4 = -\frac{61}{4}$$

$$3(x-2)^2 + (y-2)^2 = -\frac{61}{4} + 16$$

$$3(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-2)^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

dividindo por $\frac{3}{4}$ em ambos os lados

$$\frac{(x-\overset{p_1}{2})^2}{\underset{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{(y-\overset{p_2}{2})^2}{\underset{b}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 1$$

equação geral da elipse

Utilizando o resumo 3, temos que a parametrização desta elipse é dada por

$$\alpha(t) = (a\cos t + p_1, b\,\text{sen}\,t + p_2), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + 2, \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,t + 2\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

ou ainda

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + 2\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,t + 2\right)\vec{j}$$

Neste momento vamos usar parte do nosso conhecimento de cálculo I, ou seja, derivar e igualar a zero:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t$$

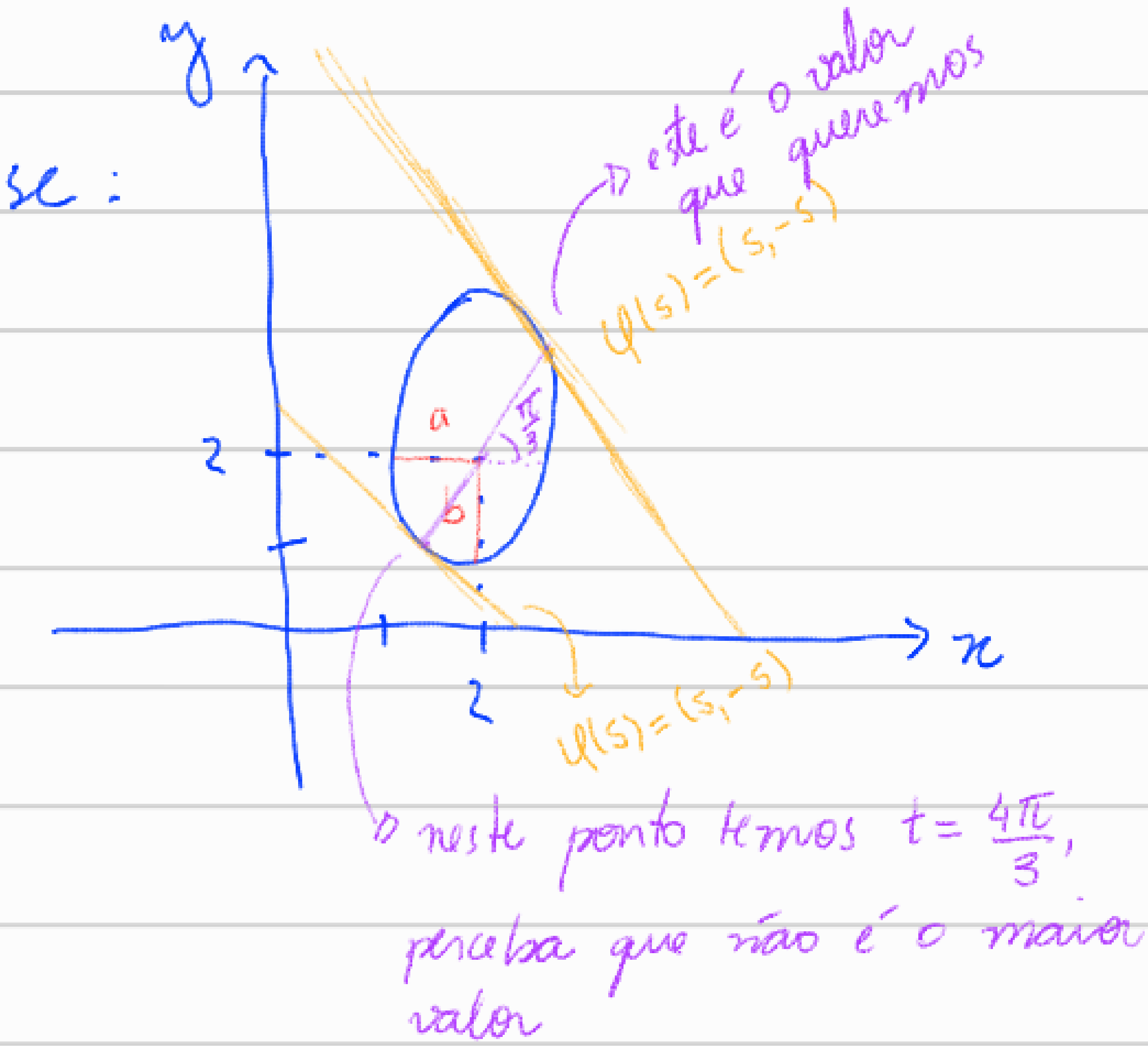
$$\sqrt{3}\cos t = \text{sen}\,t$$

$$\sqrt{3} = \frac{\text{sen}\,t}{\cos t} = tg(t) \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \text{ ou } t = \frac{4\pi}{3}$$

$$u(x,y) = x + y = 0 \rightarrow y = -x$$

Assim, uma parametrização para $u(x,y)$ é dada por $\gamma(s) = (s, -s)$, $s \in \mathbb{R}$

Observe o desenho da elipse:




Finalmente, substituindo $\frac{\pi}{3}$ em $\alpha(t)$, temos

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+2,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{8}{4},\ \frac{3}{4}+\frac{8}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{4},\ \frac{11}{4}\right)$$

#

**Questão 2** (0,5 pt). Sejam $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y = 43\}$ e $q = (2,2)$ Calcule a distância de $q$ a $C$ ou seja $\inf \|q - (x,y)\|$ onde $(x,y) \in C$.

1. 1
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. - $\frac{1}{2}$
5. 2
6. 3
7. não sei

Observe que $C$ é uma hipérbole:

$$9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y = 43$$

$$9(x-1)^2 = 9x^2 - 18x + 9$$
$$-4(y-2)^2 = -4y^2 + 16y - 16$$

$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 9 + 16 = 43$$

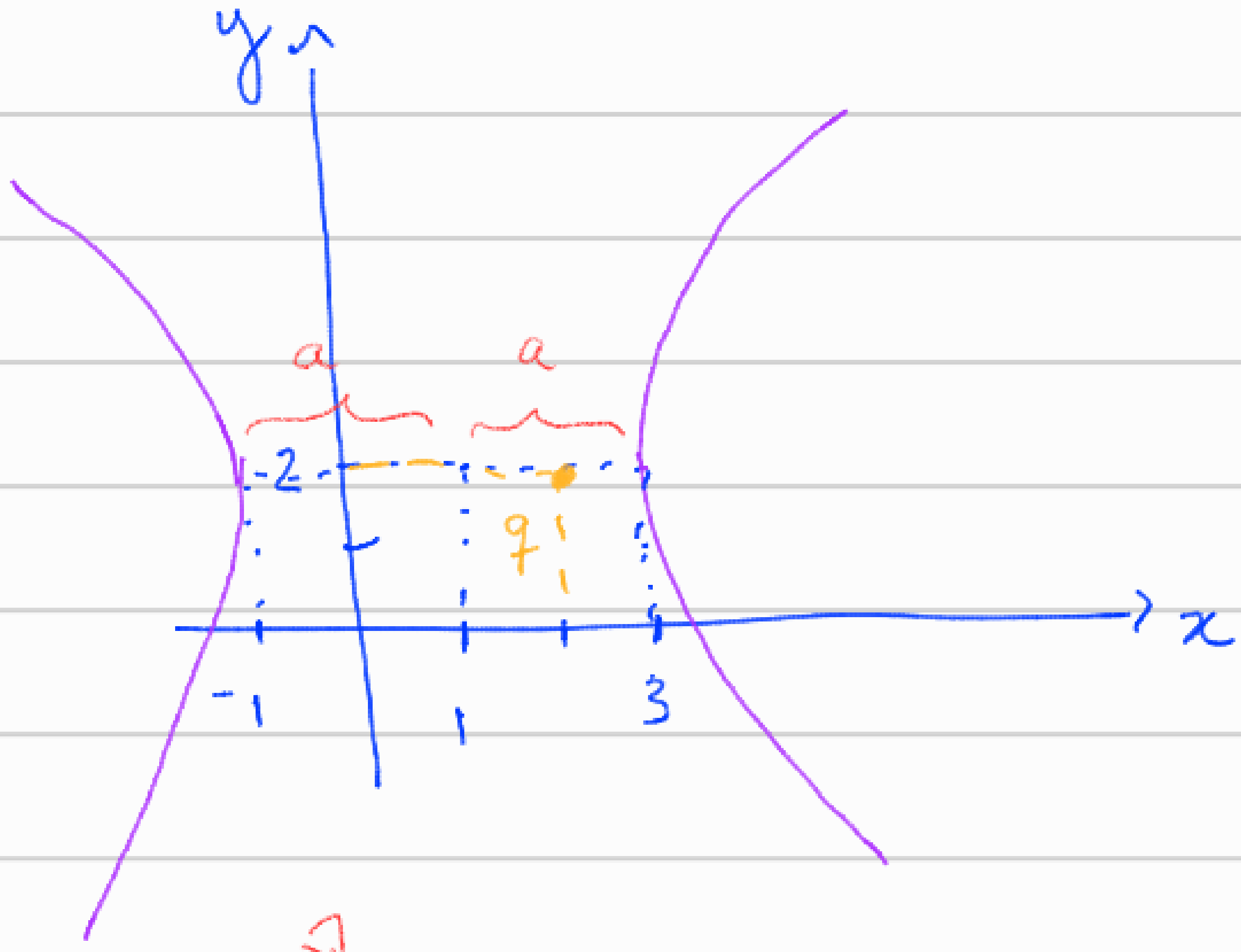
$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 38$$

$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y-2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{\underset{a}{2^2}} - \frac{(y-2)^2}{\underset{b}{3^2}} = 1$$

equação geral da hipérbole

Fazendo o desenho, temos:




Dessa forma, determinar a distância da hipérbole ao ponto $q = (2, 2)$ se resume a calcular a distância do ponto $(x, y) = (3, 2)$ a $q = (2, 2)$:

Percebe que nem precisaria fazer a conta, basta observar o desenho

$$\| q - (x, y) \| = \| (2, 2) - (3, 2) \|$$

$$= \| (-1, 0) \|$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

**Questão 3** (0,5 pt). Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ a curva parametrizada que atende a seguinte E.D.O $\frac{d}{dt}x(t) = -x(t)$, $\frac{d}{dt}y(t) = y(t)$, $x(0) = \frac{1}{2}$ e $y(0) = 2$. Determine em qual curva a imagem de $\alpha$ está contida.

1. hiperbole $xy = 1$
2. hiperbole $4x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1$
3. elipse $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$
4. elipse $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$
5. circulo $x^2 + y^2 = 4$
6. não sei.

Aqui vamos, mais uma vez, utilizar parte de nosso conhecimento de cálculo I para solucionar a E.D.O.:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) \quad e \quad x(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) \quad e \quad y(0) = 2$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 2e^{t}$$

Para determinar qual das curvas satisfaz

$\alpha(t) = (\overset{x}{\frac{1}{2}e^{-t}}, \overset{y}{2e^{t}})$, decidi substituir em cada alternativa. Vamos começar pela alternativa 5:

(5) círculo $x^2+y^2=4$

$$\left(\frac{1}{2}e^{-t}\right)^2+\left(2e^{t}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{-2t}+4e^{2t}$$

$$= \frac{1}{4e^{2t}}+4e^{2t} \neq 4$$

não satisfaz.

(4) elipse $x^2+\frac{1}{4}y^2=1$

$$\left(\frac{1}{2}e^{-t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(2e^{t}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}4e^{2t}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^{2t}}+4e^{2t}\right) \neq 1$$

não satisfaz

(3) elipse $4x^2+\frac{1}{4}y^2=1$

$$\frac{4}{4}e^{-2t}+\frac{4}{4}e^{2t}=\frac{1}{e^{2t}}+e^{2t}\neq 1$$

<u>não satisfaz</u>

(2) hipérbole $4x^2-\frac{1}{4}y^2=1$

$$\frac{4}{4}e^{-2t}-\frac{4}{4}e^{2t}=\frac{1}{e^{2t}}-e^{2t}\neq 1$$

não satisfaz

(3) hipérbole $xy=1$

$$\frac{1}{2}e^{-2t}\cdot 2e^{2t}=\frac{2}{2}e^{(-2t+2t)}=1\cdot e^{0}=1$$

<u>SATISFAZ</u>

Portanto, $\alpha(t)$ representa a hipérbole $xy=1$ //