Comentários Referentes à Resolução da 1ª Série de Problemas

Q2. def Processo Markoviano

$$P[X(t) \leq x / X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \dots X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_n) = x_n] =$$

$$= P[X(t) \leq x / X(t_n) = x_n]$$

para $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t$

Se um processo estocástico tem incrementos independentes, então

$X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ... $X(t_n) - X(t_{n-1})$ e

$X(t) - X(t_n)$ são variáveis aleatórias mutuamente independentes.

Logo $X(t)$ somente depende de $X(t_n)$ e do ~~incremento~~ $X(t) - X(t_n)$ que é uma variável independente

Q3. $Z = \min\{X, Y\}$

$$Z > z \iff X > z \text{ e } Y > z$$

Então $P[Z > z] = P[X > z, Y > z]$

$$\underset{\text{indep}}{\overset{X \text{ e } Y}{=}} P[X > z] \cdot P[Y > z]$$

Q4 - semelhante a Q3

Q5 a) distribuição de $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ número de chegadas ao terminal 1 até o instante t.

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ número chegadas ao terminal 2 até o instante t

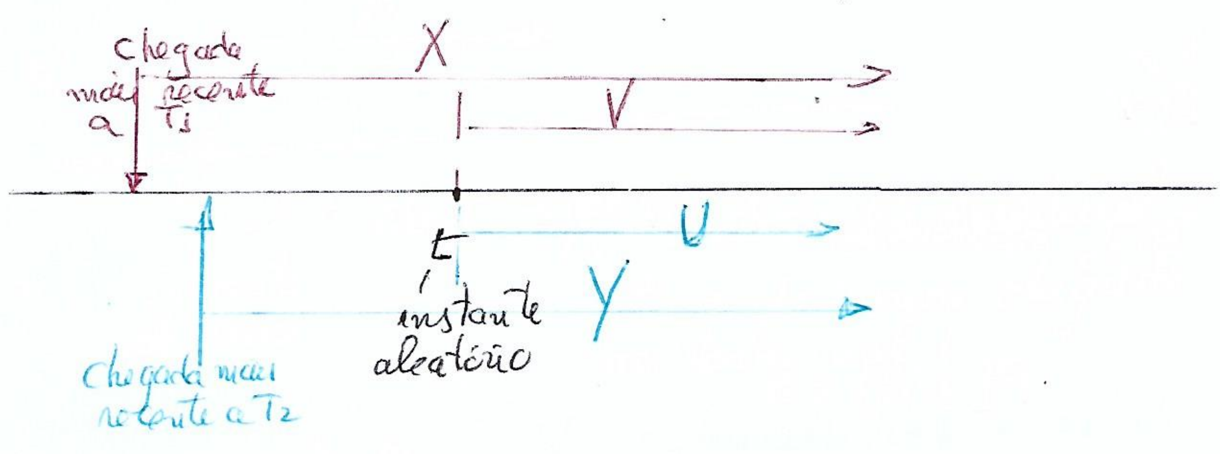
$$P[N(t) = n] = \sum_{k=0}^{n} P[N_1(t) = k, N_2(t) = n-k]$$

$$\underset{N_1(t) \text{ e } N_2(t)}{\overset{\text{indep}}{=}} \sum_{k=0}^{n} P[N_1(t) = k] \cdot P[N_2(t) = n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^k e^{-\lambda_1 t}}{k!} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{n-k} e^{-\lambda_2 t}}{(n-k)!} =$$

$$\underset{\text{de Newton}}{\overset{\text{binômio}}{=}} \ldots = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot \frac{((\lambda_1+\lambda_2)t)^n}{n!}$$

b)



Na figura acima,

X (Y) – intervalo entre chegadas consecutivas ao terminal 1 (2) → é variável aleatória exponencial (sem memória), de média $1/\lambda_1$ ($1/\lambda_2$) (pois o processo de chegada é Poisson com taxa λ_1) (λ_2)

V (U) – intervalo residual, contado (medido) a partir de um instante aleatório t, até a próxima chegada ao terminal 1 (2) também é uma variável aleatória exponencial de média $1/\lambda_1$ ($1/\lambda_2$)

Portanto, a probabilidade que a primeira chegada ocorra no terminal 1 (terminal para navios porta-contêineres) é igual à probabilidade que a variável aleatória U (exponencial de média $1/\lambda_2$) seja maior que a variável aleatória V (exponencial de média $1/\lambda_1$). Questão já resolvida nas Notas de Aula de 27/08/2020

Q6

a) T_1 – terminal para granéis líquidos
T_2 – terminal para fertilizantes
T_3 – terminal de contêineres

$P[N_1(\cancel{4}) = 2, N_2(1) = 1, N_3(1) = 0] =$

$P[N_1(1) = 2]\, P[N_2(1) = 1]\, P[N_3(1) = 0]$

aplicar a cada terminal a distribuição de Poisson correspondente, com taxas em navios/dia.

b) Por analogia a Q5b, sejam:

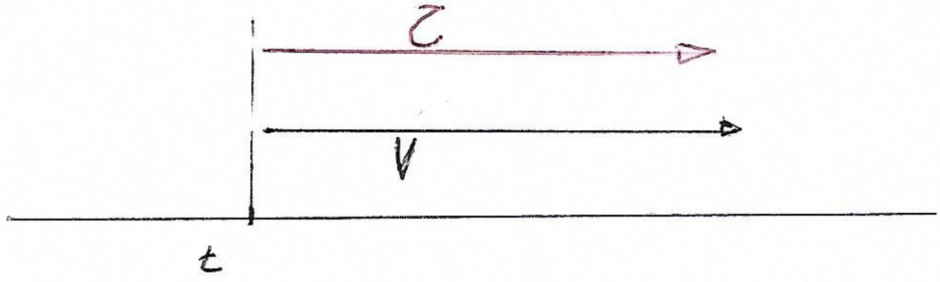
V – intervalo residual até a próxima chegada a T_1, medido a partir do início do dia;

U – intervalo residual até a próxima chegada a T_2, também medido a partir do início do dia;

T – intervalo residual até a próxima chegada a T_3, também medido a partir do início do dia T_3 – contêineres

Probabilidade que, num dado dia, a primeira chegada ocorra no terminal de contêineres é igual à $P[\min\{V, U\} > T]$. Para prosseguir, veja comentários referentes às Questões 3 e 5b.

Q6c



V – tempo residual de atendimento do navio no berço ocupado

τ – intervalo residual até a próxima chegada ao terminal de contêineres, T_3

É necessário calcular

$$P[\tau > V]$$

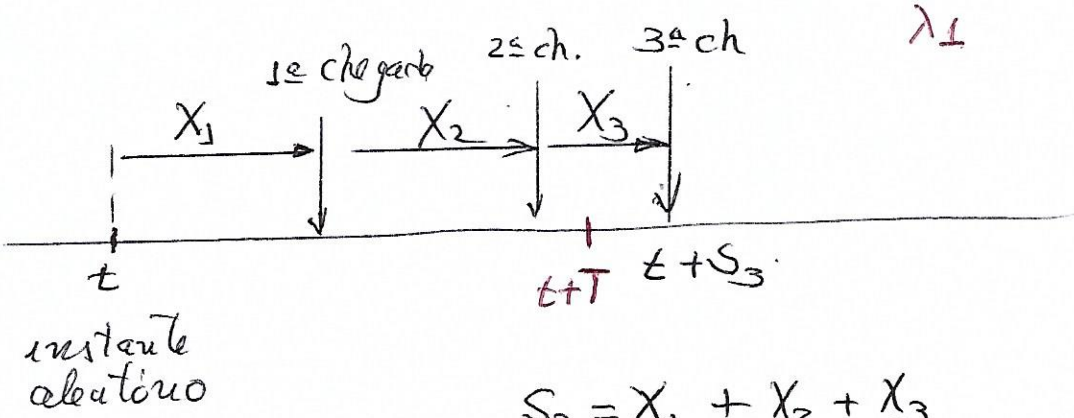
τ – exponencial de média $1/\lambda_3$

V – exponencial de média $1/\mu_3$

que corresponde à repetição de cálculo já visto

Q7

a) Terminal de granéis líquidos (T_1) $\downarrow$ λ_1



$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

S_3 tem distribuição Erlang de ordem 3

$$f_{S_3}(t) = \lambda_1^3 t^2 e^{-\lambda_1 t}/(2!)$$

$$P[S_3 > T] = 1 - P[S_3 \le t] =$$

$$= 1 - \int_0^T f_{S_3}(t)\,dt$$

caminho alternativo para resolução é perceber que

$$S_3 > T \iff N(t+T) - N(t) \le 2$$

do que decorre

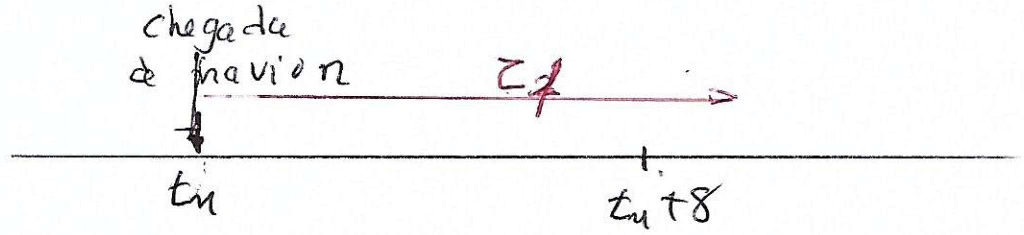
$$P[S_3 > T] = \sum_{k=0}^{2} P[N(t+T) - N(t) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{(\lambda_1 T)^k e^{-\lambda_1 T}}{k!}$$

$\lambda_1 = 2$ navios/dia

$T = 1/3$ dia

Q7b



τ_f - intervalo até a próxima chegada ao terminal de fertilizantes

$$P[\tau_f > 8] = 1 - P[\tau_f \le 8] =$$

$$= 1 - \int_0^8 \frac{\lambda_f^3 t^2 e^{-\lambda_f t}}{2!}\,dt$$

Q9

Inicialmente, é importante entender que, pela descrição do processo, o número de passagens pela máquina 6 é uma variável aleatória geométrica (sem memória). Portanto, o tempo total de processamento de uma peça que acabou de sair da máquina 4 e o tempo adicional total de processamento de uma peça que voltou do controle de qualidade têm a mesma distribuição de probabilidade.

a) TTM6 – tempo total de processamento de uma peça na máquina 6

N – número de passagens de uma peça pela máquina 6

Caso $N = n$, o tempo total de processamento de uma dada peça na máquina 6 é a soma de n exponenciais de média $1/\lambda$, que tem distribuição Erlang de ordem n

$$f_{TTM6/N=n}(t) = (\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}) / (n-1)!$$

Para eliminar a condicionalidade,

$$f_{TTM6}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{TTM6/N=n}(t) \times P[N=n] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\right)(1-p)^{n-1} p$$

observar $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$P[TTM6 \leq T] = \int_0^T f_{TTM6}(t)\,dt$$

9b – a questão já foi tratada em aula; também pode ser resolvida a partir do resultado do item 9a.

9c Cuidado apenas no cálculo do tempo médio de processamento na máquina 6 para as peças aproveitadas.

Q10 – Já foi examinada em aula

Q11. A argumentação (a) é correta e o equívoco na argumentação b pode ser explicado com o resultado do item (b) da Q10

Q12 Resolução análoga à Q9a e Q9b

Tempo de permanência de um cliente que, ao chegar, encontra n clientes no sistema é igual à soma de:

a) tempo residual do cliente que está sendo atendido exponencial de média $1/\mu$;

b) tempos de atendimento dos $(n-1)$ clientes que estavam na fila, todos exponenciais de média $1/\mu$;

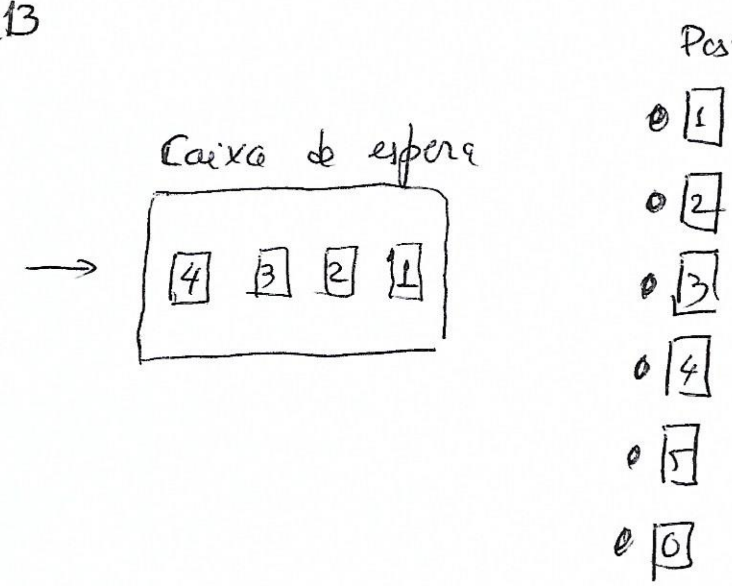
c) seu próprio de atendimento, também exponencial de média $1/\mu$

Portanto, caso encontre n clientes, o tempo de permanência no sistema terá distribuição Erlang de ordem $(n+1)$

$$f_{tp/n}(t) = \frac{\lambda^{n+1} t^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

e
$$f_{tp}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} t^n e^{-\lambda t}}{n!} \rho^n (1-\rho)$$

Q13



Observar que o primeiro cliente da caixa de espera aguarda para entrar em atendimento o mínimo entre 6 variáveis exponenciais de média igual a 5 minutos. E o segundo cliente da caixa de espera? e o 4º?

Q14 Ocorrência de eventos $\{N(t),\ t \geq 0\}$

$$P[N(t) = n] = (\lambda t)^n e^{-\lambda t}/n!$$

$\{N_r(t),\ t \geq 0\}$ número de eventos registrados

$$P[N_r(t) = n] = \sum_{k=n}^{\infty} P[n \text{ registros}/k \text{ ocorrências}]\, P[k \text{ ocorr}$$

Portanto, a chave é calcular a probabilidade de que sejam registrados n eventos quando ocorrem k $(k > n)$ eventos. Este cálculo tem a ver com a probabilidade de um evento ser registrado (sucesso) e a probabilidade de n sucessos em k ocorrências