AULA 15

# MECÂNICA QUÂNTICA II

AULA 15

## 3.9) Transformações de Lorentz, Espinores e Representações

Vimos que transformações infinitesimais do grupo de Lorentz

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu$$

matriz antisimétrica 4×4 (6 comp. indep.)

$\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} = 0 \implies$ : 6 matrizes 4×4 antisimétricas independentes formam uma base (3 rotações + 3 boosts)

$$(M^{\overbrace{\alpha\beta}^{a}})^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}$$

$a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$
$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

$\alpha, \beta$ = par de índices antisimétricos que identificam as matrizes

i.e. $M^{10} = -M^{01}$ etc.

$\mu, \nu$ = índices (antisimétricos) de uma matriz 4×4

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = g^{\alpha\mu} g^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu} g^\alpha{}_\nu = g^{\alpha\mu} \delta^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu} \delta^\alpha{}_\nu$$

ex:

$$(M^{01})^\mu{}_\nu = g^{0\mu} \delta^1{}_\nu - g^{1\mu} \delta^0{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gera boost na direção $x^1$

$$(M^{12})^\mu{}_\nu = g^{1\mu} \delta^2{}_\nu - g^{2\mu} \delta^1{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gera rotação no plano $(x^1, x^2)$

podemos assim escrever

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\,\Omega_{\alpha\beta}\,(M^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} \qquad (55)$$

$\Omega_{\alpha\beta}$ = (6 números, i.e. parâmetros das rotações e boosts)

$M^{\alpha\beta}$ são os geradores da álgebra de Lie de Lorentz e pode-se mostrar que obedecem as relações

$$[M^{\alpha\beta}, M^{\tau\nu}] = g^{\beta\tau} M^{\alpha\nu} - g^{\alpha\tau} M^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} M^{\beta\tau} - g^{\beta\nu} M^{\alpha\tau} \quad (56)$$

Assim uma transformação de Lorentz finita

$$\Lambda = \exp \frac{1}{2}\,\Omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \qquad (57)$$

É possível mostrar (mostre!) que

$$S'^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}] = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \qquad (58)$$

também obedece as relações (56), logo $S^{\alpha\beta}$ também formam uma representação da álgebra de Lie de Lorentz, chamada de representação espinorial, onde $\{\gamma^{\alpha}\}$ obedecem a álgebra de Clifford.

Vimos que um espinor 4x4 de Dirac $\psi^{\alpha}(x)$ se transforme por transf. de Lorentz

$$\psi^{\alpha}(x) \longrightarrow S[\Lambda]^{\alpha}{}_{\beta}\,\psi^{\beta}(\Lambda^{-1}x) \quad (59a)$$

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}\right) \qquad (59b)$$

$$S[\Lambda] = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}\right) \qquad (59c)$$

Note que embora a base de geradores $M^{\alpha\beta}$ e $S^{\alpha\beta}$ seja diferente, usamos os mesmos 6 números $\Omega_{\alpha\beta}$ em $\Lambda$ e $S[\Lambda]$ pois estamos realizando a mesma transformação de Lorentz em $x$ e $\psi$.

É útil introduzir aqui uma outra representação das matrizes de Dirac, a chamada <u>representação de Weyl ou Quiral</u>

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

(a) <u>Rotações</u>

$$S^{ij} = \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

$i \neq j$

lembrando que $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ ; $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta_k^l$

se escrevermos os parâmetros de rotação $\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\varphi^k$

ex: $\Omega_{12} = -\varphi^3$ etc... A rotação nessa representação fica

$$S[\Lambda] = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi}}{2}} \end{pmatrix} \quad (60)$$

Note que (60) essa transformação está na forma bloco diagonal e que $S^{+}[\Lambda]\,S[\Lambda] = 1$ (é unitária)

Para $\vec{\varphi} = (0, 0, 2\pi)$ $S[\Lambda] = -1 \Rightarrow \psi^{\alpha}(x) \longrightarrow -\psi^{\alpha}(x)$

enquanto que $\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathbb{I}^{\rho\sigma}\right) = 1$ nesse caso.

(5) Boosts

$$S^{0i} = \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

$\Omega_{i0} = -\Omega_{0i} = \chi_i$

$$S[\Lambda] = \exp\left(\frac{1}{2}\Omega_{0i}S^{0i} + \frac{1}{2}\Omega_{i0}S^{i0}\right) = \begin{pmatrix} e^{\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix} \quad (61)$$

Note que (61) está na forma bloco diagonal, mas não é uma transformação unitária. Lembre-se que não há representação unitária de dimensão finita para o grupo de Lorentz! Para $S[\Lambda]$ unitária, precisamos que $S^{\mu\nu\dagger} = -S^{\mu\nu}$ (antihermitiana), mas

$$S^{\mu\nu\dagger} = \frac{1}{4}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]$$ o que é uma impossibilidade p/ todas as $\gamma^\mu$; $(\gamma^0)^2 = 1$ $(\gamma^i)^2 = -1$ !

A representação quiral mostra que o espinor de Dirac de 4 componentes é uma representação redutível do grupo de Lorentz, ela se decompõe em 2 representações irredutíveis $u_{L(R)}$ que na representação quiral são definidas por

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} \quad ;(62)$$

$u_L / u_R \to$ espinores de Weyl

$u_L \to (\frac{1}{2}, 0)$, $u_R \to (0, \frac{1}{2})$

$u_{L(R)} \longrightarrow e^{i\frac{\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}}{2}} u_{L(R)}$ por rotação

$u_{R(L)} \longrightarrow e^{\pm, \vec{x}.\vec{\sigma}/2}\, u_{R(L)}$ por boost

O que acontece em outra representação

$$\gamma^\mu \to S\,\gamma^\mu S^{-1} \qquad \psi \to S\psi \qquad ?$$

agora $S[\Lambda]$ não será mais bloco diagonal. Existe uma forma invariante para definir espinores quirais?

Vimos $\gamma_5 = i\,\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$, $(\gamma_5)^2 = 1$

é fácil mostrar que $[S^{\mu\nu}, \gamma^5] = 0 \implies \gamma^5$ é um escalar sob rotação e boosts!

É possível defini os <u>projetores invariantes de Lorentz</u>

$$P_{L(R)} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \gamma_5\right) \quad (63)$$

na representação quiral $P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ $P_R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esses projetores projetam os espinores de Weyl $u_L$ e $u_R$.

Para uma representação arbitrária da álgebra de Clifford os espinores quirais podem ser definidos por

$$\psi_{L(R)}^{(x)} = P_{L(R)}\,\psi(x) \quad (64)$$

$\psi_{L(R)}$ formam as representações irredutíveis do grupo de Lorentz, $\psi_L(x)$ = espinor de mão esquerda; $\psi_R(x)$ = espinor de mão direita.

4.0) <u>Soluções da Equação de Dirac para Partícula Livre</u>

Procuremos soluções de

$$(i\hbar \partial\!\!\!/ - mc)\,\psi(x) = 0 \quad \text{tal que}$$

$$\psi(x) = e^{-i\left(\frac{E}{c}ct - \vec{p}\cdot\vec{x}\right)/\hbar} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (65a)$$

$$= e^{-i\,px/\hbar} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (65b)$$

usaremos agora a representação usual (Pauli-Dirac). Nessa representação

$$i\hbar \left[ \begin{pmatrix} \partial_0 e^{-\frac{ipx}{\hbar}} & 0 \\ 0 & -\partial_0 e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\partial} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial} & 0 \end{pmatrix} e^{-ip\cdot\frac{x}{\hbar}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \right] - mc\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = 0$$

$$i\hbar \left(\frac{-iE}{\hbar c}\right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \underline{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + i\hbar \left(\vec{\sigma}\cdot\frac{i\vec{p}}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \underline{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} - mc\, \underline{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$(E - mc^2)\,\tilde{\varphi} = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\tilde{\chi} \quad (66a)$$

$$(E + mc^2)\,\tilde{\chi} = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\tilde{\varphi} \quad (66b)$$

Note que

$$c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,(E - mc^2)\,\tilde{\varphi} \overset{(66b)}{=} (E + mc^2)(E - mc^2)\,\tilde{\chi} = (E^2 - m^2c^4)\,\tilde{\chi}$$

$$\underset{(66a)}{=} c^2 (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2\,\tilde{\chi} = c^2 p^2\,\tilde{\chi}$$

$$\Longrightarrow E_{\pm} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \quad \text{2 soluções possíveis}$$

por construção!

Vamos para um referencial onde $\vec{p} = 0$ (partícula em repouso). Nesse referencial

(a) para $E = E_+ = mc^2$

$(66b) \Rightarrow \tilde{\chi} = 0$ e $\tilde{\varphi}$ por (66a) pode ser uma combinação linear dos estados de base

$$\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo os vetores de base para a solução $E = E_+ = mc^2$ são

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que estão automaticamente ortonormalizados

(b) para $E = E_- = -mc^2$

$(66a) \Rightarrow \tilde{\varphi} = 0$ e $\tilde{\chi}$ por (66b) pode ser uma combinação linear dos vetores de base $\xi_\pm$ logo os vetores de base para a solução de energia $E = E_- = -mc^2$ são

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O operador de spin

$$\frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

tem $u_1, u_3$ como auto vetores de $\frac{\hbar}{2} \Sigma_z$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} u_{1,3} = \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u_{1,3} = \frac{\hbar}{2} u_{1,3}$$

e $u_2, u_4$ como autovetores de $\frac{\hbar}{2}\Sigma_z$ com autovalor $-\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_z & 0\\ 0 & \sigma_z\end{pmatrix} u_{2,4} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} u_{2,4} = -\frac{\hbar}{2}\, u_{2,4}$$

$u_1$ = autoestado de $E = mc^2$, spin $\uparrow$ $= u^+_\uparrow(0)$

$u_2$ = " " ", spin $\downarrow$ $= u^+_\downarrow(0)$

$u_3$ = autoestado de $E = -mc^2$, spin $\uparrow$ $= u^-_\uparrow(0)$

$u_4$ = autoestado de $E = -mc^2$, spin $\downarrow$ $= u^-_\downarrow(0)$

No caso geral (66 b)

$$\tilde{\chi} = \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\tilde{\varphi} \qquad \text{para } E = E_+$$

$$u_1(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{E+mc^2}\, p_z \\ \frac{c}{E+mc^2}\,(p_x + i p_y)\end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \overset{\xi_+}{\tilde{\varphi}_1} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\overset{\xi_+}{\tilde{\varphi}_1}\end{pmatrix} \quad (67a)$$

normalização (depende da escolha!)

$$u_2(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c\,(p_x - i p_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-c\, p_z}{E+mc^2}\end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \overset{\xi_-}{\tilde{\varphi}_2} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\,\overset{\xi_-}{\tilde{\varphi}_2}\end{pmatrix} \quad (67b)$$

exemplo

$$|N|^2 = \left(1 + \frac{c^2(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{(E+mc^2)^2}\right) = 2E \qquad N = \sqrt{E+mc^2}$$

$$= u_i^+ u_i$$

Para $E = E_-$ no caso geral

$$\tilde{\varphi} = \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E - mc^2}\,\tilde{\chi} \qquad E = E_- < 0$$

$$u_3(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-mc^2}\,\cancel{\xi}_+ \\ \cancel{\xi}_+ \equiv \tilde{\chi}_1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{c\,p_z}{E-mc^2} \\ \frac{c}{E-mc^2}(p_x + i p_y) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (68a)$$

$$u_4(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-mc^2}\,\tilde{\chi}_2 \\ \tilde{\chi}_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{c\,(p_x - i p_y)}{E-mc^2} \\ \frac{-c\,p_z}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (68b)$$

$\xi_-$

Note que para $\vec{p} \neq 0$ as soluções (67) e (68) não são autovetores de $\vec{\Sigma}$! Isso já era esperado pois $[\vec{\Sigma}, H] \neq 0$ ! ($\propto \vec{\alpha}\times\vec{p}$ !)

$$u_{(3,4)}(-\vec{p})\, e^{-i[-p].x} \equiv v_{(2,1)}(\vec{p})\, e^{ip.x} \quad (69) \qquad p^0 \equiv E > 0$$

(antipartícula)

$v_{(2,1)}$ é um pósitron de Energia $E$ e momento $\vec{p}$

Note que o operador helicidade

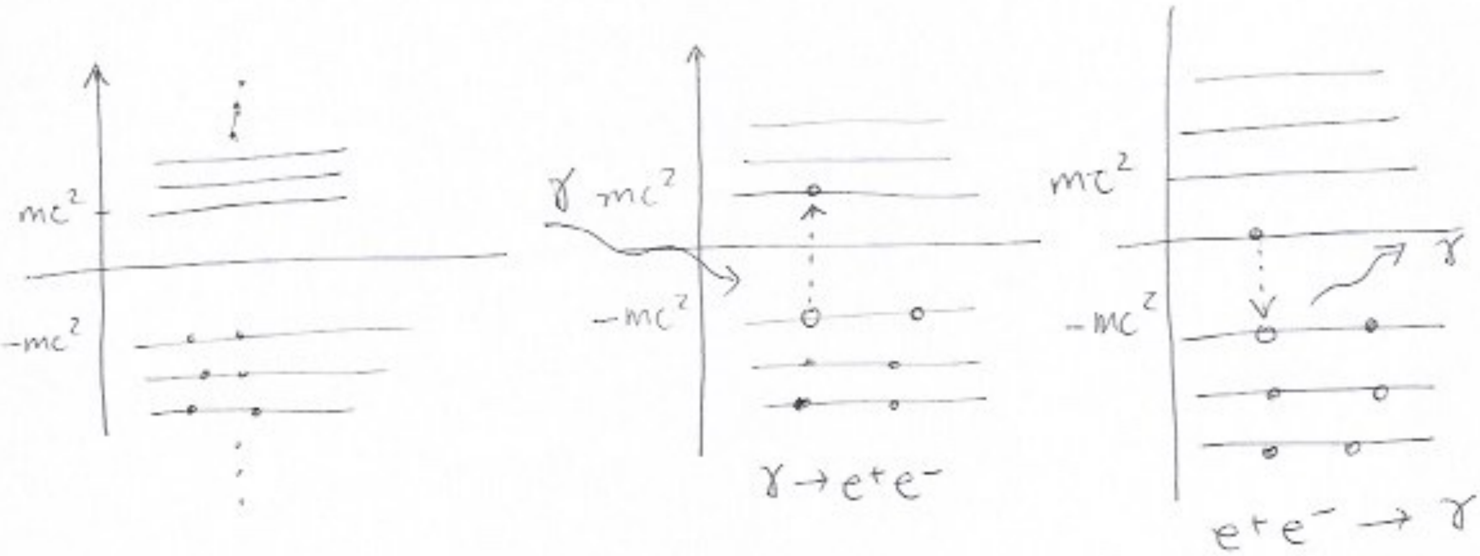
$$h \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} \quad (70)$$

comuta com $H$ e $\vec{p}$ $\Rightarrow$ a ~~componente~~ do Spin na direção do momento é um bom número quântico

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\ \xi_\pm = \pm\,\xi_\pm$$

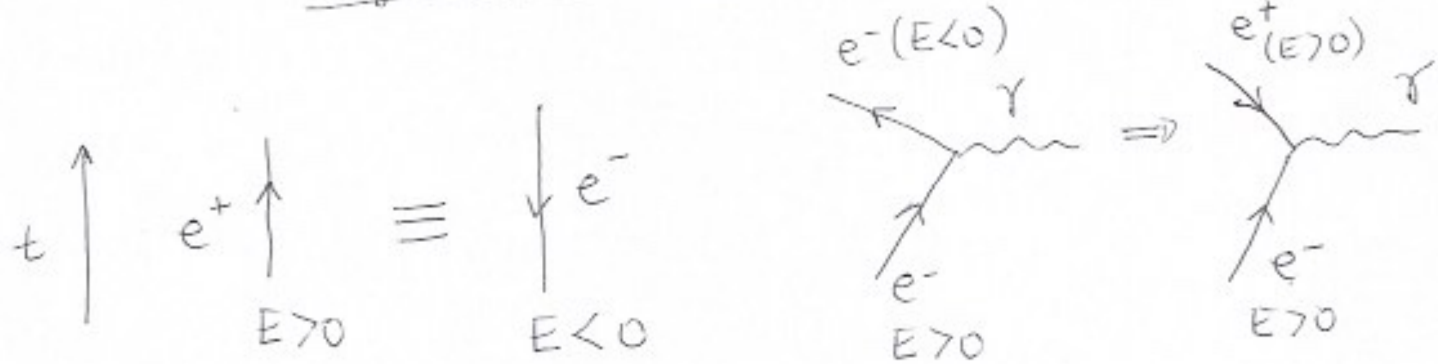
Podemos construir anti-estados de helicidade bem definida!

# MAR DE DIRAC (Interpretação)




Positron Descoberto 1932
em raios cósmicos por C.D Anderson

## Feynman-Stückelberg (Interpretação)




$$e^{-i(-E)(-t)} \to e^{-iEt}$$

$$v_1(\vec{p},E)\, e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar} = u_4(-\vec{p},-E)\; e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$$

$$v_2(\vec{p},E)\, e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar} = u_3(-\vec{p},-E)\; e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)/\hbar}$$

$u_{1,2}(\vec{p})$ e $v_{1,2}(\vec{p})$ tem energia, momento ~~[illegible]~~ bem definidos.

$$(i\hbar \partial\!\!\!/ - mc)\, u(\vec{p})\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}} = 0$$

$$\left[i\hbar\left(\frac{-i}{\hbar}\,p\!\!\!/\right) - mc\right] u(\vec{p})\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}} = 0 \Rightarrow (p\!\!\!/ - mc)\, u(\vec{p}) = 0$$

$$p\!\!\!/ = \gamma^\mu p_\mu$$

– se $m = 0$: $\quad p\!\!\!/\, u(\vec{p}) = 0 \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$$\gamma^5\gamma^0 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad \gamma^5\gamma^0\, p\!\!\!/\, u(\vec{p}) = 0 \qquad (\gamma^5\gamma^0\gamma^0 p^0 - \gamma^5\gamma^0\gamma^i p^i)\, u(\vec{p}) = 0$$

$$\gamma^5 p^0 u(\vec{p}) = \gamma^5\gamma^0\gamma^i p^i\, u(\vec{p}) \qquad \gamma^5\gamma^0\gamma^1 = +i\gamma^2\gamma^3 = \sigma^{23} = \Sigma^1 \text{ etc.}$$

$$= \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\; u(\vec{p}) \qquad p^0 = |\vec{p}|$$

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\, u(\vec{p})$$ : $u(\vec{p})$ é auto-estado de helicidade e quiralidade

– se $m \neq 0$: $\quad p\!\!\!/\, u(\vec{p}) = mc\, u(\vec{p})$

$$\gamma^5 p^0 u(\vec{p}) = \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\, u(\vec{p}) + \gamma^5\gamma^0 mc\, u(\vec{p}) \qquad p^0 = E/c$$

$$\gamma^5 u(\vec{p}) = c\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{(E)}\, u(\vec{p}) + \gamma^5\gamma^0\frac{mc^2}{E}\, u(\vec{p})$$ $u(\vec{p})$ não é mais auto-estado de quiralidade

analogamente para $v(\vec{p})$!

## Partículas de Massa Nula

Usando a representação de Weyl podemos escrever

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \qquad \text{em } i\hbar\partial\!\!\!/\psi = 0$$

para obter

$$\begin{cases} E\,u_R = c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;u_R \\ E\,u_L = -c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\;u_L \end{cases} \quad (71) \Longrightarrow \text{desacoplam}$$

Cada uma dessas equações está baseada na relação $E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2$
$\Longrightarrow$ tem soluções de energia positiva e negativa. A solução de energia positiva $E = |\vec{p}|c$ satisfaz a

$$u_L = -\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\;u_L \quad \Longrightarrow \quad \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,u_L = -u_L$$

estado geral de mão esquerda tem helicidade $-\frac{1}{2}\hbar$, energia $E$ e momento $\vec{p}$.

A outra solução p/ $u_L$, tem $-E$ e ~~momento~~ $-\vec{p}$ e satisfaz

$$\vec{\sigma}\cdot(-\hat{p})\,u_L = u_L$$

como helicidade oposta $+\frac{1}{2}\hbar$. Pode ser interpretada como uma antipartícula de energia $E$ e momento $\vec{p}$ e helicidade $\frac{1}{2}\hbar$

De forma análoga $u_R$ descreve uma partícula ~~da~~ helicidade $-\frac{1}{2}\hbar$ e energia $E$ e momento $\vec{p}$ e uma antipartícula de energia $E$, momento $\vec{p}$ e helicidade $+\frac{1}{2}\hbar$

## 4.1) Conjugação de Carga

Usando o acoplamento mínimo podemos escrever a equação de Dirac para o elétron (ou uma partícula de carga $-e$) como

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{q}{c}A^\mu - mc\right]\psi = 0 \quad \text{(c.f. eq 37)}$$

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{e}{c}A^\mu - mc\right]\psi(x) = 0 \quad (72)$$

Para uma partícula de carga oposta i.e $+e$ ~~a~~ equação será

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}A^\mu - mc\right]\psi_c(x) = 0 \quad (73)$$

$$(72)^* \Rightarrow \left[-i\hbar\gamma^{\mu *}\partial_\mu + \frac{e}{c}\gamma^{\mu *}A_\mu - mc\right]\psi^*(x) = 0$$

$$\left[-\gamma^{\mu *}\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right]\psi^*(x) = 0$$

se pudermos encontrar uma matriz $C\gamma^0$ tal que

$$-(C\gamma^0)\gamma^{\mu *} = \gamma^\mu(C\gamma^0)$$

$$\Rightarrow \gamma^\mu\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\ (C\gamma^0\psi^*) = 0$$

$$\psi_c = C\gamma^0\psi^* = C\bar{\psi}^T \quad (74)$$

Note que se $e = 0$ (carga nula) as equações (72) e (73) são idênticas $\Rightarrow \psi(x) = \psi_c(x) = C\bar{\psi}^T$ (Fermion de Majorana)

(75)

## 4.2) Paridade

$$x^0 \longrightarrow x^0$$
$$\vec{x} \longrightarrow -\vec{x}$$

$$\Lambda^\lambda{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda_P$$

mas $S^{-1}\gamma^\lambda S = \Lambda^\lambda{}_\mu\gamma^\mu$

logo. $S_P$ associado com $\Lambda_P$ satisfaz

$$S_P^{-1}\gamma^0 S_P = \gamma^0 \qquad S_P^{-1}\gamma^i S_P = -\gamma^i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow S_P = \gamma^0 \quad (76)$$