Máximos e Mínimos sobre compactos

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

A) Dizemos que A é limitado se A estiver contido em alguma bola aberta de centro na origem.

B) Dizemos que A é um conjunto fechado se o seu complementar for um conjunto aberto.

C) Dizemos que A é compacto se A for fechado e limitado.

Exemplo

Toda bola fechada de centro (x_0, y_0) *e raio* $r > 0$,
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq r\}$ *é um conjunto compacto, pois é fechado e limitado*

Exemplo

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$ *é um conjunto fechado, mas não limitado, logo* A *não é compacto.*

Teorema de Weierstrass

Teorema

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem P_1 e P_2 em A tais que, para todo P em A

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2).$$

P_1 é ponto de mínimo de f em A e P_2 é ponto de máximo de f em A.

observação:
O teorema anterior garante que se f é uma função contínua definida em um compacto A então f admite pontos de máximo e mínimo em A, mas não diz como determinar estes pontos.
Sabemos que se f admite derivadas parciais no interior de A, os únicos pontos candidatos a extremante de f são os pontos críticos.
Deste modo se queremos determinar os extremantes de f em A devemos determinar os pontos críticos de f que estão no interior de A e em seguida, determinar os valores de máximos e mínimos na fronteira de A. Comparando os valores que f assume nos pontos críticos com o valor de máximo (mínimo) de f na fronteira de A, o maior (menor) destes valores será o valor máximo (mínimo) de f em A.

Exemplo

Determine os extremantes de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ *em* $A = [0,2] \times [0,2]$

solução:

Primeiro: Determinar os pontos críticos de f no interior de A.

$$\nabla f(x,y) = (2x - 2y, 2y - 2x) = (0,0) \Rightarrow y = x$$

Portanto os pontos críticos de f que estão no interior de A são pontos da forma (x,x), com $0 < x < 2$.

Segundo: Encontre os candidatos a extremos de f na fronteira de A.

Consideremos as funções:

$g_1(y) = f(0,y) = y^2$, $0 \leq y \leq 2$. Temos que $y = 0$ e $y = 2$ são os extremos de g_1. Portanto $(0,0)$ e $(0,2)$ são candidatos a extremos de f em A.

$g_2(y) = f(2, y) = y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$, $0 \leq y \leq 2$. Temos que $y = 0$ e $y = 2$ são os extremos de g_2. Portanto $(2, 0)$ e $(2, 2)$ são candidatos a extremos de f em A.

$h_1(x) = f(x, 0) = x^2$, $0 \leq x \leq 2$. Temos que $x = 0$ e $x = 2$ são os extremos de h_1. Portanto $(0, 0)$ e $(2, 0)$ são candidatos a extremos de f em A.

$h_2(x) = f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Temos que $x = 0$ e $x = 2$ são os extremos de h_2. Portanto $(0, 2)$ e $(2, 2)$ são candidatos a extremos de f em A.

Terceiro: Avalie a função nos candidatos a extremos, para encontrar os extremos de f.
$f(x,x) = 0$ para $0 \leq x \leq 2$, $f(0,2) = 4$, $f(2,0) = 4$

conclusão:
Portanto os pontos da forma (x,x) para $0 \leq x \leq 2$ são pontos de mínimos de f em A e os pontos de $(0,2)$ e $(2,0)$ são pontos de máximos de f em A.