

Máximos e Mínimos

Definição

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in \Omega$. Dizemos que P_0 é um ponto de máximo (global) de f em Ω se, $f(P_0) \geq f(P)$ para todo $P \in \Omega$. Sendo P_0 ponto de máximo de f o número $f(P_0)$ é chamado de valor máximo de f em Ω .

Definição

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in \Omega$. Dizemos que P_0 é um ponto de máximo local de f se existe uma bola B centrada em P_0 tal que $f(P_0) \geq f(P)$ para todo $P \in B \cap \Omega$.

Definição

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in \Omega$. Dizemos que P_0 é um ponto de mínimo (global) de f em Ω se, $f(P_0) \leq f(P)$ para todo $P \in \Omega$. Sendo P_0 ponto de mínimo de f o número $f(P_0)$ é chamado de valor mínimo de f em Ω .

Definição

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in \Omega$. Dizemos que P_0 é um ponto de mínimo local de f se existe uma bola B centrada em P_0 tal que $f(P_0) \leq f(P)$ para todo $P \in B \cap \Omega$.

Definição

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P_0 \in \Omega$. Dizemos que P_0 é um ponto de sela de f se para toda bola B centrada em P_0 , existem P e Q em $B \cap \Omega$ tais que $f(P) \leq f(P_0) \leq f(Q)$.

Observação:

As vezes usaremos o termo extremo global (local) ou extremante global (local) para designar um ponto de máximo global (local) ou mínimo global (local).

Exemplo

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $f(0, 0) = 0$ é o valor mínimo de f , pois, $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de máximo global de $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ e $f(0, 0) = 1$ é o valor máximo de f , pois, $f(x, y) \leq f(0, 0) = 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Definição

Dizemos que um ponto P_0 pertencente ao interior de D_f é um ponto crítico de f se $\nabla f(P_0) = (0, 0)$

Teorema

Seja P_0 um ponto interior de D_f e suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$ existam. Se P_0 é um extremante local de f então $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$, isto é, $\nabla f(P_0) = (0, 0)$.

Observação:

- 1) Segue deste teorema que se P_0 é ponto interior a D_f , f diferenciável em P_0 e P_0 é extremante local de f , então o plano tangente ao gráfico de f em $(P_0, f(P_0))$ será paralelo ao plano $z = 0$.
- 2) O teorema anterior nos diz que se f admite derivadas parciais em todos os pontos interiores de D_f , então os pontos críticos de f são, entre os pontos interiores de D_f , os únicos candidatos a extremantes locais de f .

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $D_f = \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, segue que $(0, 0)$ é o único candidato a extremante local. Vimos que $(0, 0)$ é mínimo global de f .

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Como $D_f = \mathbb{R}^2$ é aberto e $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$, segue que $(0, 0)$ é o único candidato a extremante local. No entanto, $(0, 0)$ não é extremante local de f , pois, $f(0, y) = -y^2 \leq f(0, 0) = 0 \leq f(x, 0) = x^2$ para todo x e para todo y . Deste modo, $(0, 0)$ é um ponto de sela de f .

Teorema

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto interior a D_f . Então

a) Se P_0 é ponto de máximo local então $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \leq 0$.

b) Se P_0 é ponto de mínimo local então $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \geq 0$.

Exemplo

Determine os candidatos a extremantes locais de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$$

solução:

Como o domínio de f é $\mathbb{R}^2$ (é aberto) os candidatos a extremantes locais são os pontos críticos de f . Temos que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3) = (0, 0) \Rightarrow$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \quad 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

Portanto os pontos críticos de f são os pontos $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Por outro lado, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$. Daí

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6$, logo $(1, 1)$ é candidato a ponto de mínimo local

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 6$, logo $(-1, 1)$ não é extremante local.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = -6$, logo $(1, -1)$ não é extremante local.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -6$, logo $(-1, -1)$ é candidato a ponto de máximo local.

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . A função $Hf(x, y)$ dada pelo determinante

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

é chamado determinante Hessiano de f . Note que

$$Hf(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2$$

Teorema

*Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f .
Suponhamos que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f . Então*

a) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $Hf(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de mínimo local de f .

b) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $Hf(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) será ponto de máximo local de f .

*c) Se $Hf(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não será extremante local.
Neste caso (x_0, y_0) será ponto de sela.*

d) Se $Hf(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar.

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. Encontrar os pontos extremantes de f .

solução: Vimos que os pontos críticos de f são $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. Temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$ e

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$$

Então

$Hf(1, 1) = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$, logo, $(1, 1)$ é ponto de mínimo local.

$Hf(-1, -1) = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$, logo, $(-1, -1)$ é ponto de máximo local.

$Hf(-1, 1) = Hf(1, -1) = -36 < 0$, logo, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ são pontos de sela.

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^4 + y^4$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e temos que $Hf(0, 0) = 0$. No entanto $(0, 0)$ é ponto de mínimo global.

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^5 + y^5$. O único ponto crítico de f é $(0, 0)$ e temos que $Hf(0, 0) = 0$. No entanto $(0, 0)$ não é extremante local de f , pois $x = 0$ não é extremante local de $f(x, 0) = x^5$.