Funções

- Definimos uma relação R entre A e B como sendo qualquer $R \subset A \times B$. Essa definição é muito geral, começaremos agora a ver relações com propriedades especiais. A primeira e talvez mais conhecida são as funções.

- A definição de função pede as propriedades que já conhecem:

Def: Uma relação binária $F \subset A \times B$ é uma função de A em B se:

(a) $\mathrm{Dom}\, F = A$ e

(b) aFb_1 e $aFb_2 \Rightarrow b_1 = b_2 \quad \forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B$

Notações:
- $F : A \to B$ (função de A em B)
- No lugar de aFb escreveremos $F(a) = b$
  (b = valor de F em a)

Obs: Se F é uma relação satisfazendo (b), F será uma função se considerarmos $F \subset \mathrm{Dom}\, F \times B$ (ou seja, "$A = \mathrm{Dom}\, F$").
(É usual, quando for dito apenas que R é uma relação e não é dito quem é "A", considerar "A" como sendo $\mathrm{Dom}\, R$ e assim apenas precisa checar (b) para saber se R é função.)

(Usaremos "f" para denotar funções como é o usual)

- Vamos ver agora alguns conceitos relacionados a funções.

- Dada uma função f, já definimos a relação inversa f^{-1}. O problema, quando trabalhamos só com funções, é que f^{-1} não precisa ser uma função. Por isso temos:

<u>Def</u>: Uma função f é dita <u>inversível</u> se f^{-1} é uma função.

<u>Problema</u>: Quando f^{-1} é uma função?

Suponha $f: A \to B$ uma função e seja $f^{-1}: B \to A$ a relação inversa da f. Para que $f^{-1} \subset B \times A$ seja função, f^{-1} precisa satisfazer as seguintes condições:

1) $\mathrm{Dom}\, f^{-1} = B$, que vale se e só se $\forall y \in B\ \exists x \in A$ t.q. $y f^{-1} x$, ou seja, tal que $x f y$. Mas isso é o mesmo que dizer que $\mathrm{Im}\, f = B$.

2) $y f^{-1} x_1$ e $y f^{-1} x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall y \in B\ \forall x_1, x_2 \in A$. Usando a definição de f^{-1} isso é o mesmo que dizer que $x_1 f y$ e $x_2 f y \Rightarrow x_1 = x_2$ $\forall x_1, x_2 \in A\ \forall y \in B$.

- Esse é a motivação para definir:

<u>Def</u>: Se $f: A \to B$ é uma função, dizemos que:

(a) f é <u>sobrejetora</u> se $\mathrm{Im} f = B$

(b) f é <u>injetora</u> se $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ $\forall a, b \in A$.

· O Exercício 6 de TCI 4 ("Funsões") pede para mostrar:

<u>Teorema</u>: Para uma funsão f, temos que f é inversível se e somente se f é injetora e sobrejetora. Além disso, se f é inversível, f^{-1} também é inversível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

<u>Obs</u>: Note que as definisões de injetora e sobrejetora foram dadas justamente para valer f^{-1} ser funsão

· As seguintes definisões podem aparecer quando trabalhamos com funsões:

<u>Def</u>: Se $f: X \to Y$ é uma funsão e $A \subset X$, definimos a <u>restrisão</u> de f a A por $f|_A = \{(x,y) \in f : x \in A\}$.

<u>Def</u>: Duas funsões f e g são ditas <u>compatíveis</u> se $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$.

→ Ir agora para a folha "Funsões" (TIC 4 no e-disciplinas) para fazer os exercícios e ver algumas propriedades.

Tente fazer o exercício 2 sozinho, antes de ver o exercício da próxima página.

(e tente fazer o exercício sozinho antes de ler a solusão)

Exercício: Para f e g funções, mostre que $f = g$ se e somente se $\text{Dom} f = \text{Dom} g$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \text{Dom} f$.

Solução

($\Rightarrow$) Suponha $f = g$. Pela "definição" de igualdade de conjuntos, temos que:

$$f = g \iff ((x,y) \in f \iff (x,y) \in g) \quad \forall (x,y).$$

Daí temos:

- $\text{Dom} f = \text{Dom} g$; pois
  $x \in \text{Dom} f \iff \exists y$ tal que $(x,y) \in f$
  $\iff \exists y$ tal que $(x,y) \in g \iff x \in \text{Dom} g$.
- $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \text{Dom} f$ pois: dado $x \in \text{Dom} f$
  $f(x) = y \iff (x,y) \in f \iff (x,y) \in g \iff g(x) = y$,
  ou seja $f(x) = g(x)$.

($\Leftarrow$) Suponha $\text{Dom} f = \text{Dom} g$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \text{Dom} f$.
Temos que mostrar que $f = g$, ou seja, que $(x,y) \in f \iff (x,y) \in g$.
De fato,

$$(x,y) \in f \iff (x \in \text{Dom} f \text{ e } f(x) = y) \overset{\text{hipótese}}{\iff} (x \in \text{Dom} g \text{ e } g(x) = y) \iff (x,y) \in g$$

//

Obs: 1) Se duas funções são iguais, então os seus domínios são iguais. Assim, por exemplo, $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$, $x \geq 0$ são funções diferentes (inclusive uma é inversível e a outra não).

2) Dom f faz parte da definição de função, ou seja, quando é dada f teria que ser dado Dom f. No entanto, assume-se, por convenção, que quando nada é dito, Dom f é o "maior possível".