

RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Definição 1. Seja R uma relação em um conjunto A . Dizemos que:

- (a) R é *reflexiva* se xRx para todo $x \in A$;
- (b) R é *simétrica* se xRy implica yRx para todo $x, y \in A$;
- (c) R é *transitiva* se xRy e yRz implicam xRz para todo $x, y, z \in A$.

Exercício 1. Verifique quais das propriedades acima a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : x|y\}$ satisfaz.

Definição 2. Uma relação R em um conjunto A é uma *relação de equivalência* em A se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A terminologia usada é aquela que vocês já devem ter visto antes:

Definição 3. Seja E uma relação de equivalência em um conjunto A .

- (i) Se aEb dizemos que a é *equivalente a b (módulo E)*.
- (ii) Se $a \in A$, o conjunto $[a]_E = \{x \in A : aEx\}$ é chamado de *classe de equivalência de a (módulo E)*.

Exercício 2. No conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ defina

$$xEy \text{ se e somente se } x \equiv y \pmod{5} \text{ se e somente se } 5|x - y.$$

- (a) Mostre que E é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.
- (b) Ache as classes de equivalência de E .

Exercício 3. Seja E uma relação de equivalência em A . Mostre que, para quaisquer a e b em A , são equivalentes as seguintes afirmações:

- (a) aEb ;
- (b) $[a]_E = [b]_E$;
- (c) $[a]_E \cap [b]_E \neq \emptyset$.

Voltando ao exercício 2, note que a relação de equivalência divide $\mathbb{Z}$ em “pedaços” não-vazios dois a dois disjuntos. Isso acontece sempre que se tem uma relação de equivalência:

Exercício 4. Seja E uma relação de equivalência em um conjunto A . Mostre que:

- (a) $[x]_E \neq \emptyset$ para todo $x \in A$;
- (b) $[x]_E \neq [y]_E$ implica $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$ para todo $x, y \in A$;
- (c) $\bigcup \{[x]_E : x \in A\} = A$.

As propriedades (a), (b) e (c) do exercício acima motivam a seguinte definição:

Definição 4. Uma coleção $\mathcal{P}$ de subconjuntos de um conjunto A é uma *partição* de A se satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $X \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathcal{P}$;
- (b) para todo $X, Y \in \mathcal{P}$ se $X \neq Y$, então $X \cap Y = \emptyset$;
- (c) $\bigcup \mathcal{P} = A$.

Segue então do exercício anterior que se E é uma relação de equivalência, o conjunto das classes de equivalência determinadas por E

$$A/E = \{[x]_E : x \in A\}$$

é uma partição de A . O conjunto A/E será chamado de *conjunto quociente de A por E* .

Temos então que toda relação de equivalência em A determina uma partição de A . Mas será que podemos fazer o caminho inverso? O exercício seguinte mostra que sim: dada uma partição de um conjunto A , podemos definir uma relação de equivalência que “corresponde” a essa partição.

5. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de um conjunto A . Defina a seguinte relação em A :

$$aE_{\mathcal{P}}b \text{ se e somente se } \exists C \in \mathcal{P} \text{ tal que } a \in C \text{ e } b \in C.$$

- (a) Mostre que $E_{\mathcal{P}}$ é uma relação de equivalência em A .
- (b) Mostre que para todo $a \in A$, $[a]_{E_{\mathcal{P}}} = X$, onde $X \in \mathcal{P}$ é tal que $a \in X$.
- (c) Conclua que $A/E_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$.

6. Seja $\mathcal{P} = \{\{-z, z\} : z \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que $\mathcal{P}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$ e defina $E_{\mathcal{P}}$.

7. Particione $\mathbb{N}$ em conjuntos da forma $\{2k, 2k+1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Ache a relação de equivalência correspondente.