Aula 5 – Regra da Substituição

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Teorema 1

Sejam $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $u : A \longrightarrow B$ *funções deriváveis, onde* A *e* B *são intervalos de* $\mathbb{R}$. *Se* F *é primitiva de* f *então* $F(u(x))$ *é primitiva de* $f(u(x)) \cdot u'(x)$.

Notação

- Tratamos $u(x)$ como se fosse uma nova variável.
- Por abuso de notação alguns livros escrevem $\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(u)du$.
- "É permitido operar com dx e du após sinais de integração como se fossem diferenciais" (Stewart).
- Ou seja, escrevemos $du = u'(x)dx$, e podemos operar formalmente (isto é, tratando símbolos como se fossem números) com dx e du.
- Em particular, podemos substituir dx por $\dfrac{du}{u'(x)}$.

Exemplo 1

Calcule $\int xe^{2-x^2}\,dx$.

Exemplo 2

Encontre uma primitiva de $\dfrac{1}{x}$.

Exemplo 3

Encontre uma primitiva de $\operatorname{tg} x$.

Teorema 2

$$\int \operatorname{tg} x dx = ln|\sec x| + C$$

Regra da Substituição para Integrais Definidas

Teorema 3

Se g' *for contínua em* $[a, b]$ *e* f *for contínua na imagem de* $g(x)$*, então:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

- **Demonstração:**
- Seja F uma primitiva de f.
- Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2, $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a))$.
- Pela Regra da Cadeia, $F \circ g$ é primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.
- Logo, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2, $\displaystyle\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

$\blacksquare$

Observação 1

Para esse teorema fazer sentido, precisamos definir $\int_a^b f(x)dx$ *como* $-\int_b^a f(x)dx$, *quando* $b < a$. *Note que o Teorema Fundamental do Cálculo continua válido para essa notação, visto que* $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$.

Exemplo 4

Calcule $\int_1^e \frac{lnx}{x}dx.$

Observação 2

Note que, quando usamos a regra da substituição para integrais definidas, **não precisamos voltar à variável** x.

Integrais de funções simétricas

Teorema 4

Seja $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua.*

(a) *Se* f *é uma função par* $(f(-x) = f(x))$*, então*
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx;$$

(b) *Se* f *é uma função ímpar* $(f(-x) = -f(x))$*, então*
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

- **Demonstração:**
- Sabemos que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.
- Considere $g(x) = -x$.
- Pelo Teorema 3, $\int_{-a}^{0} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(-a)}^{g(0)} f(u)du =$ $\int_{a}^{0} f(u)du = -\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Como $g'(x) = -1$, temos $\int_{-a}^{0} f(g(x)) \cdot (-1)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$

- Portanto $\int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$.
- Se f é uma função par, temos
$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$
- Logo, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- Se f é uma função ímpar, temos
$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
- Logo, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$.

$\blacksquare$

Integrais impróprias de funções simétricas

Corolário 1

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e tal que a integral imprópria* $\int_0^{\infty} f(x)dx$ *converge.*

(a) *Se* f *é uma função par, então*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)dx;$$

(b) *Se* f *é uma função ímpar, então* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$

Fim