

1ª. Lista de Exercícios

1) Considere a representação de Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

a) Calcule a Matriz de Transição de Estados para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Calcule a Resposta para um degrau unitário, admitindo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}; x_1(0) = 2; x_2(0) = 0$$

c) Calcule a Matriz de Transferência para

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Calcule os auto-valores e auto-vetores de “A”

e) Determine a representação do sistema na forma canônica diagonal admitindo as matrizes conforme os itens a) e b)

2) Demonstrar os resultados abaixo

$$a) \Phi(0) = I$$

$$b) \Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1} \Rightarrow [\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t)$$

$$c) \Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

$$3.1) e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \text{ se } A \text{ e } B \text{ comutam } (AB = BA)$$

$$d) [\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$$

$$e) \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1) = \Phi(t_2 - t_0)$$

$$f) \det(A) = \det(A^T)$$

$$g) e^{(A^T)t} = e^{(At)^T}$$

3) Calcule os zeros do sistema e zeros de transmissão

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4) Dado o sistema abaixo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Calcule os autovalores e autovetores e identifique os modos do sistema.
- Forneça uma interpretação para cada modo
- Especifique as condições iniciais que estimulam cada modo isoladamente
- Represente o sistema na forma em que “A” passa a ser diagonal e verifique a controlabilidade e observabilidade dos modos.

5) Demonstre

- Se uma matriz nxn possui “n” autovalores distintos, os respectivos autovetores formam um conjunto L.I.
 - A matriz modal formada pelos autovetores do item anterior é invertível
- 6) Sejam A,B,C,D matrizes nxn, nxm, mxn e mxn, respectivamente

- Para os determinantes de A e D não nulos, mostre que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D}|$$

Sugestão: Utilize a expressão da matriz através de um produto de matrizes convenientemente escolhidas e aplique a propriedade do determinante do produto de matrizes

- Para o determinante de A não nulo, mostre que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$$

c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

7) Para a dinâmica do pêndulo invertido representada abaixo, pede-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u'$$

$$y = \theta = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

- Verifique a Controlabilidade e Observabilidade do Sistema
- Mude a matriz de saída, "C" para $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, que representa a troca de um sensor de posição angular por um sensor de velocidade angular. Verifique a observabilidade
- Dê a interpretação física para o resultado do item b)

8. As equações linearizadas de movimento de um satélite podem ser escritas na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Onde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

As entradas u_1 e u_2 são os empuxos radial e tangencial, respectivamente, x_1 e x_3 são os desvios radial e angular em relação à órbita circular. As saídas y_1 e y_2 são as medidas radial e angular, respectivamente.

- Mostre que o sistema é controlável usando ambos os sinais de controle.
- Mostre que o sistema é controlável a partir de uma entrada somente. Qual seria essa entrada?
- Mostre que o sistema é observável utilizando as medidas das 2 variáveis de saída
- Mostre que o sistema é observável a partir de uma saída somente. Qual seria essa saída?

9. Mostre que uma transformação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ não modifica a função de transferência

10. Considere os Modelos

Modelo 1:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + 2u \\ y &= 3x \end{aligned}$$

Modelo 2:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

- Mostre que a mesma função de transferência é gerada em ambos os modelos.
- Explique como isso é possível, com modelos tão diferentes