



PME 3543

Estruturas Mecânicas e de Veículos

Notas de Aula

Prof. Leandro V. da S. Macedo

09

**Convergência de
Resultados no MEF em
função da
discretização da malha**

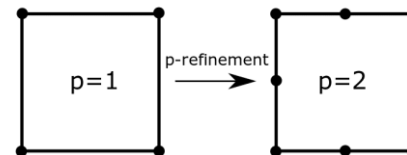
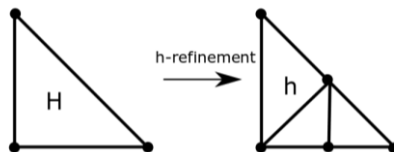


Convergência de resultados

Estimativa de erro

Refinamento de malha

- Como já foi dito, os métodos de discretização irão representar a solução contínua com uma aproximação tão boa quanto se deseje, conforme aumente-se a quantidade de elementos utilizados na discretização, isto é, conforme refine-se a discretização.
- Esta é uma possibilidade então para alcançar-se um “bom” resultado (do ponto de vista de engenharia). É a subdivisão da malha até os resultados de interesse convergirem para um determinado valor. Este processo é chamado de “***h-refinement***”.
- No MEF utilizamos as funções de forma para interpolar um resultado de deslocamento no interior do elemento a partir dos deslocamentos nodais. As funções de forma usualmente são polinômios. Uma outra forma alternativa então de se buscar a convergência de resultados seria aumentar a ordem dos polinômios utilizados. Esta processo é chamado de “***p-refinement***”. Não vamos abordá-lo aqui por ser de menor utilização na prática de engenharia. Usualmente para um tipo de análise o engenheiro de cálculo utiliza-se de know-how acumulado e adota sempre um mesmo tipo de elemento finito disponível na biblioteca do software comercial adotado. Ele não fica alterando o tipo de elemento finito em busca de convergência de resultados.





Convergência de resultados - Estimativa de erro - Refinamento de malha

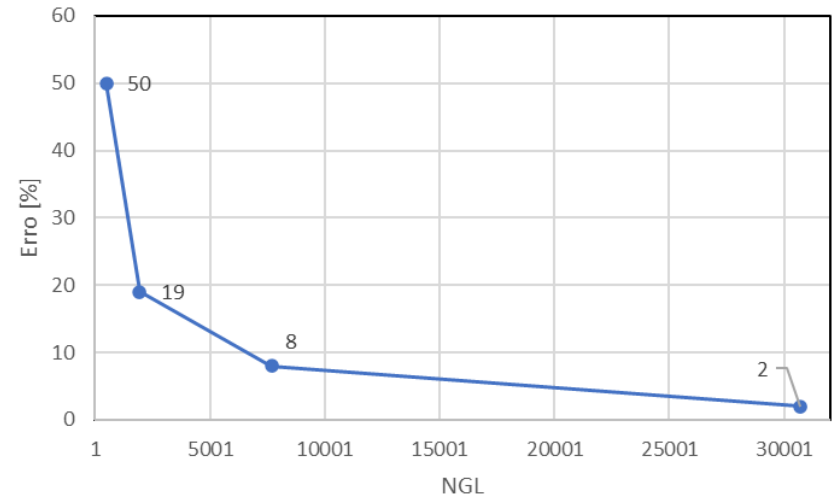
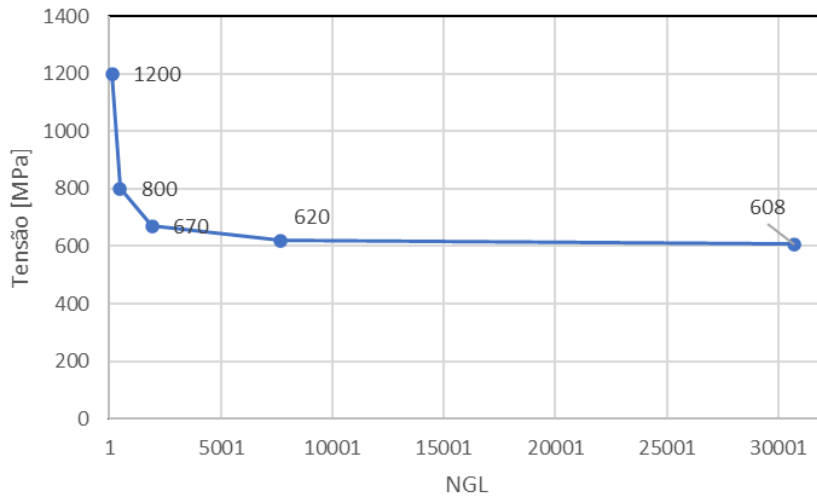
- Dentro das empresas é usual haver know-how acumulado que define a priori o tamanho de malha sempre que determinado tipo de componente, submetido a determinado tipo de carregamento e determinadas condições de contorno está sendo analisado.
- Entretanto, como proceder quando há um novo componente, uma nova situação a ser analisada? Como saber se a discretização adotada está fornecendo “bons” resultados?
- Vamos esclarecer então um procedimento para verificação da convergência de resultados que será adotada como critério de aceitação de um “bom” resultado.
- Faz-se um primeiro cálculo com uma malha de discretização escolhida de forma arbitrária, ou melhor, baseada em na experiência acumulada do engenheiro.
- Aumenta-se a discretização nos pontos de interesse.
- Calcula-se a variação percentual dos resultados.
- Verifica-se se esta variação porcentual está menor do que o critério de aceitação.

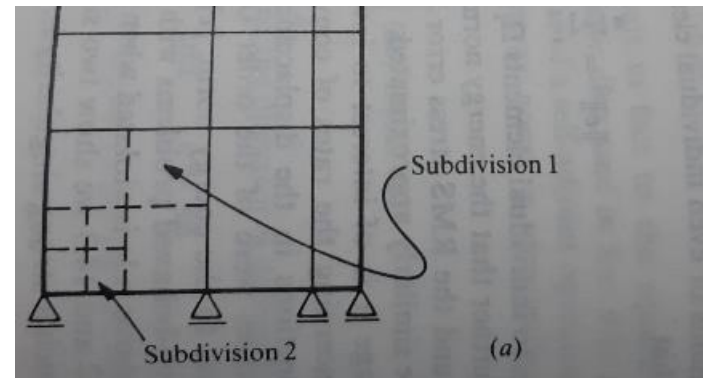
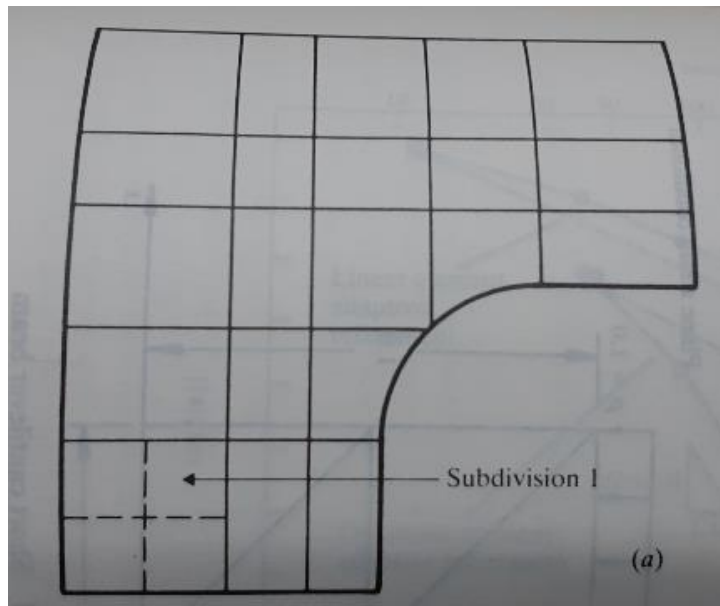


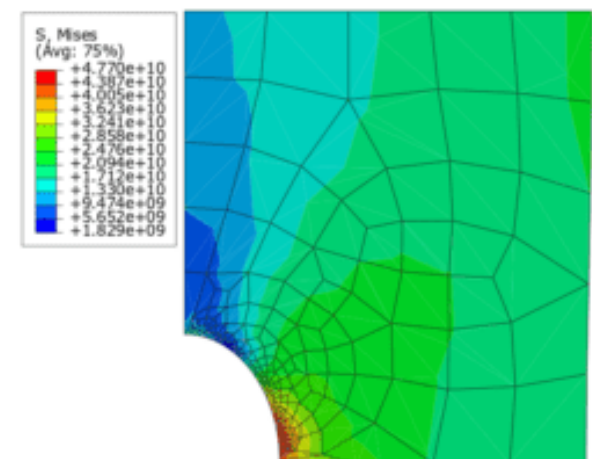
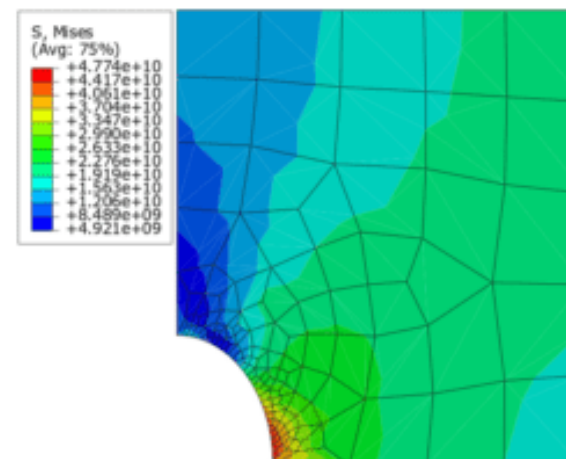
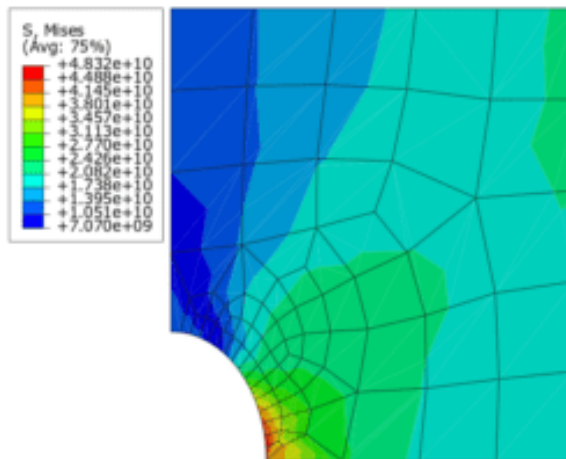
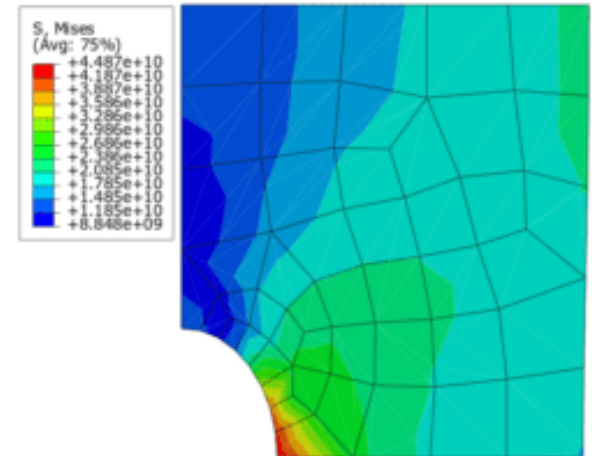
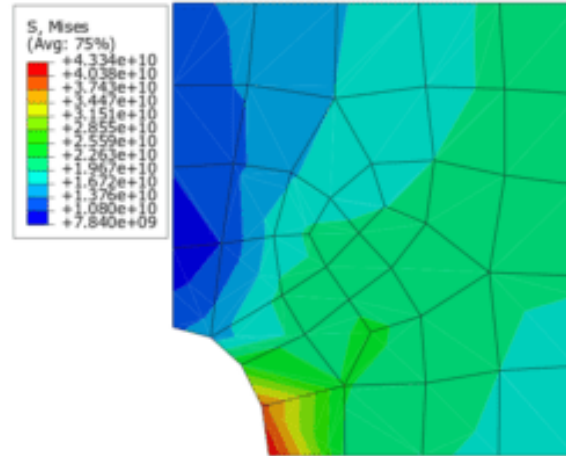
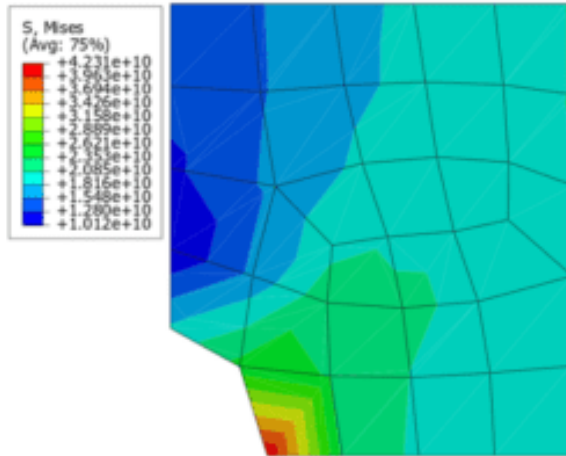
Convergência de resultados - Estimativa de erro - Refinamento de malha

- O refinamento da malha (isto é, aumento da discretização), resulta num aumento do número total de graus de liberdade do modelo.
- Plotando-se o erro relativo em função do número de graus de liberdade, espera-se obter o seguinte comportamento:

NGL	Tensão	Erro [%]
120	1200	
480	800	50%
1920	670	19%
7680	620	8%
30720	608	2%

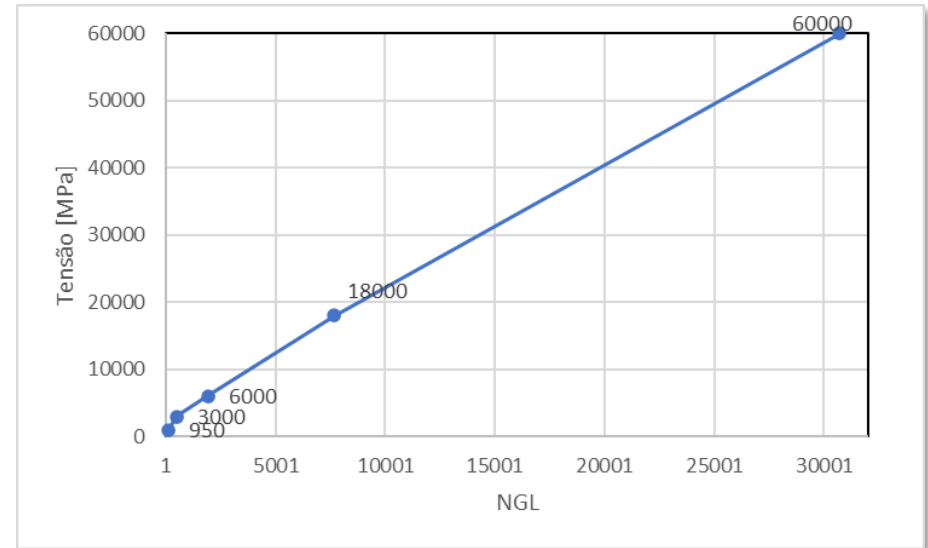
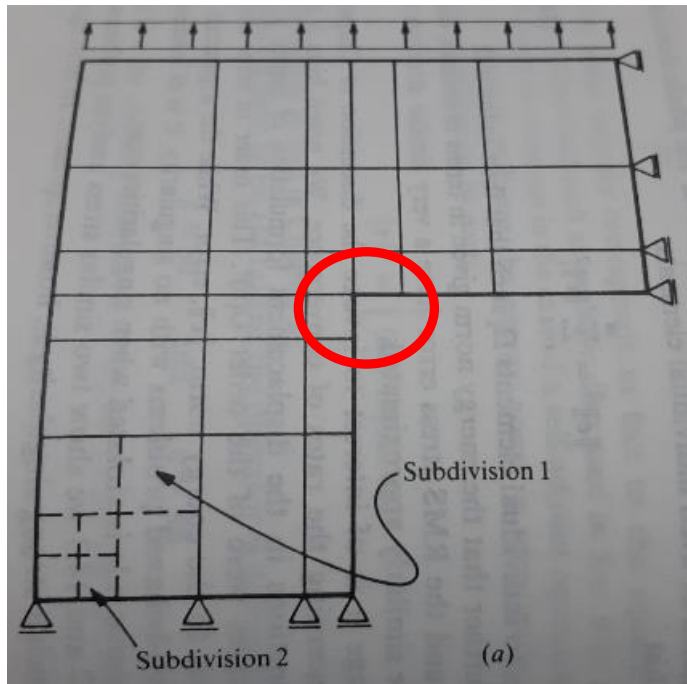








Situações de singularidade



Singularidade no canto vivo → tensão tende ao infinito → não é refinando a malha que o valor irá convergir, muito antes pelo contrário, o resultado numérico pelo MEF está buscando o resultado teórico esperado, isto é, está cada vez aumentando mais... buscando o valor teórico infinito.

Deve-se verificar qual é a geometria correta da peça, isto é se há ou não um raio de adoçamento. Havendo raio de adoçamento ele deve ser representado aumentando-se o suficiente a discretização da malha de elementos finitos.

Numa situação real onde o projeto não tenha previsto raio de adoçamento isto não quer dizer que obrigatoriamente haverá falha. Irá depender da condição de carregamento e da característica do material. Por exemplo, sendo o material dúctil e o carregamento não repetitivo, pode haver um escoamento local, uma alteração plástica da geometria da peça e consequente redistribuição da concentração das tensões, podendo eventualmente assim a peça resultar em uma situação estável segura.



Error in displacements

$$\epsilon_u = u - u^h$$

Error in strains

$$\epsilon_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^h$$

Error in stresses

$$\epsilon_\sigma = \sigma - \sigma^h$$

L₂-error norm of the displacement

$$\|\epsilon_u\|_{L_2} = \sqrt{\oint_V \epsilon_u \cdot \epsilon_u dV}$$

Energy norm

$$\|\epsilon_\varepsilon\|_E = \sqrt{\oint_V \epsilon_\varepsilon : \mathbb{C} : \epsilon_\varepsilon dV}$$

L₂-error norm of the stress

$$\|\epsilon_\sigma\|_{L_2} = \sqrt{\oint_V \epsilon_\sigma \cdot \epsilon_\sigma dV}$$

H₁-norm

$$\|\epsilon_\sigma\|_{H_1} = \sqrt{\oint_V (\epsilon_u \cdot \epsilon_u + \epsilon_\varepsilon \cdot \epsilon_\varepsilon) dV}$$

RMS value of error norms:

$$RMS(\|\epsilon_{XX}\|_{YY}) = \sqrt{\frac{(\|\epsilon_{XX}\|_{YY})^2}{\Omega}}$$

$$RMS(\|e_u\|_{L_2}) = \left(\frac{\|e_u\|_{L_2}^2}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$RMS(\|e_\sigma\|_{L_2}) = \left(\frac{\|e_\sigma\|_{L_2}^2}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$RMS(\|e_\varepsilon\|_E) = \left(\frac{\|e_\varepsilon\|_E^2}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

 $\mathbb{C} \equiv [D]$ matriz de elasticidade Ω domínio (volume, área, etc ...)



FIM 09