Derivada direcional

Definição

Suponha $z = f(x, y)$ *uma função definida em um aberto* D_f*,* $P_0 \in D_f$ *e* $\vec{u} = (a, b)$ *um vetor unitário. O limite*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}$$

quando existe e é finito é chamado a derivada direcional de f *no ponto* (x_0, y_0) *na direção do vetor* $\vec{u} = (a, b)$*.*

Observação:
As derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0) são particularmente derivadas direcionais. De fato, se $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemplo

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. *Calcule* $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ *onde*
a) $\vec{u} = (a,b)$ *um vetor unitário.*
b) $\vec{u}$ *é o versor de* $\vec{v} = (1,1)$

solução: a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1+ta, 1+tb) - f(1,1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1+ta)^2 + (1+tb)^2 - 2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 + 2ta + t^2a^2 + 1 + 2tb + t^2b^2 - 2}{t}$$

$$= 2a + 2b$$

b) Seja $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. De a) temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Exemplo

Seja $\vec{u} = (a, b)$ *um vetor unitário. Calcule* $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ *onde*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

solução: Temos que

$$\frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{a^3t^3}{a^2t^2+b^2t^2}}{t} = \frac{a^3}{a^2+b^2} = a^3, \quad t \neq 0$$

Daí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+ta, 0+tb) - f(0,0)}{t} = a^3$$

Observação: Já vimos que a função f do exemplo anterior é contínua em $(0,0)$, mas não é diferenciável em $(0,0)$. Deste modo, uma função pode ter derivada direcional em todas as direções no ponto, e mesmo assim não ser diferenciável neste ponto.

Derivada direcional e vetor gradiente

Teorema

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto e* $\vec{u} = (a, b)$ *um vetor unitário. Se* f *for diferenciável em* (x_0, y_0), *então* f *admitirá derivadas direcional em* (x_0, y_0), *na direção de* $\vec{u} = (a, b)$, *e*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b$$

Demonstração: Seja g dada por $g(t) = f(x_0 + ta, y_0 + tb)$. Da diferenciabilidade de f em (x_0, y_0) segue a diferenciabilidade de g em $t = 0$ e, pela regra da cadeia

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b = \nabla f(x_0, y_0).\vec{u}$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\vec{u}$$

$\square$

Teorema

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω *aberto,* f *diferenciável em* (x_0, y_0) *e tal que* $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. *Então*

A) o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ *ocorre quando* $\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$

B) o valor mínimo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ *ocorre quando* $\vec{u} = -\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$

C) e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$ *se* $\vec{u}$ *for tangente a curva de nível de* f *no ponto* (x_0, y_0)

Demonstração: Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\vec{u} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$. Deste modo, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ terá valor máximo quando $\theta = 0$, valor mínimo quando $\theta = \pi$, e será nulo, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\square$

Observação: 1) Notemos que se

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

2) O teorema anterior nos diz, que estando em (x_0, y_0), a direção e sentido que se deve tomar para que f cresça mais rapidamente é a do vetor $\nabla f(x_0, y_0)$.

Exemplo

Seja $f(x, y) = x^2 y$.
a) Determine $\vec{u}$ *de modo que* $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ *seja máximo.*

b) Qual o valor máximo e o valor mínimo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$*?*

c) Estando em $(1, 1)$*, que direção e sentido deve-se tomar para que* f *cresça mais rapidamente?*

Solução: Temos que $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2) \Rightarrow \nabla f(1, 1) = (2, 1)$

a) Como f é diferenciável em $(1, 1)$ e $\nabla f(1, 1) \neq (0, 0)$, segue que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é máximo para $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

b) O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ é $\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{5}$, e o valor mínimo é $-\|\nabla f(1, 1)\| = -\sqrt{5}$.

c) $\nabla f(1, 1) = (2, 1)$ aponta a direção e sentido em que a função mais cresce.