SMA0306 - Álgebra II

Prof. Daniel

Lista 2

Outubro / 2020

Teoremas do livro de A. Gonçalves, quarta edição.

- Ler o Teorema 1 da pág. 49.
- Ler o Teorema 3 da pág 52.
- Ler a Proposição5 da pág 54, ítens (a), (b) e (d).
- Ler os primeiros parágraos da pág 56.
- Ler a Proposição 6 da pág. 56.

Exercícios do livro de A. Gonçalves, quarta edição.

- Págs 53-54, números 1, 2, 3, 5, 7, 9.
- Págs 58-60 números 1, 3, 6, 7, 8.
- Págs 74-75 números 1, 2, 3, 9, 10.

Exercícios do livro de Garcia - Lequain, 6 edição.

- Pág 22, n. I.3.4; pág 28 n. I.3.10; pág 34 I.4.10
- Págs 36-37 , números 7, 8, 10, 11, 12.
- Pág 43, n. II.1.6 e II.1.7; pág 44 n. II.1.10; pág 45 II.1.12; pág. 51 II.2.4 e II.2.5
- Págs 65-67 II.4, Exercícios, números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9.

Exercício extra:

Seja K um corpo. O objetivo deste exercício é definir a característica de K (veja também Garcia, Lequain Definição I.4.8 e Exercício I.4.9, pág. 34 e Gonçalves exercícios 11, 12, 13 pág 59).

(1) Considere a aplicação $\phi : \mathbb{Z} \to K$ dada por $\phi(n) = n.(1_K)$ se $n \geq 0$ e $\phi(-n) = n.(-1_K)$ se $n \leq 0$. Mostre que ϕ é um homomorfismo de anéis.

(2) Pelo teorema dos isomorfismos $\frac{\mathbb{Z}}{\ker\phi} \cong \operatorname{im}\phi$. Conclua que $\ker\phi = (0)$, isto é, ϕ é injetiva, ou $\ker\phi = (p)$ para algum primo $p \in \mathbb{Z}$. (Dica: $\operatorname{im}\phi \subset K$ é um domínio já que é um subanel de um corpo.)

No primeiro caso, isto é $\ker\phi = (0)$ dizemos que K tem **característica zero**. No segundo caso, isto é $\ker\phi = (p)$, p primo, dizemos que K tem **característica prima** p. Notação: car $(K) = 0$ ou car$(K) = p$

(3) Mostre que se K tem característica zero se, e somente se,

$$\underbrace{1_K + 1_K + \cdots + 1_K}_{n \text{ vezes}} \neq 0,$$

para todo $n \geq 1$.

(4) Mostre que se K tem característica prima p se, e somente se,

$$\underbrace{1_K + 1_K + \cdots + 1_K}_{p \text{ vezes}} = 0,$$

e p é o menor inteiro positivo com essa propriedade.

(5) Mostre que se $K \subset L$ é uma extensão de corpos, então car $(K) =$ car (L).

(6) Mostre que K tem característica zero se, e somente se, $\mathbb{Q} \subset K$.

(7) Mostre que K tem característica prima p se, e somente se, $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \subset K$.

Assim, todo corpo contém o corpo $\mathbb{Q}$ ou um corpo finito $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$.

(8) Generalize para D um domínio em vez de um corpo K.

(9) Generalize para A um anel qualquer. Quais modificações você precisa fazer?