MAT 0147: Cálculo II (T21-FEA-USP)

Aplicação derivada e plano tangente

Guia Resumido 5

Prof. M Alexandrino

Setembro 2020

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. O GeoGebra http://www.geogebra.org (aqui utilizado) é uma ótima ferramenta, porém o aluno deve também tentar fazer as figuras na mão para compreende-las melhor.

Objetivo: Estudar derivada de funções, aplicações e suas interpretações. Observe que neste resumo U sempre será um conjunto aberto.

Derivada parcial

Def: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. A **derivada parcial** com respeito a variável x_i é definida (quando existir) como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} f(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_i + t, \cdots, p_m) - f(p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{h(p_i + t) - h(p_i)}{t} \\
&= \frac{d}{dx_i} h(p_i)
\end{aligned}$$

onde $h(x_i) = f(p_1, \cdots, p_{i-1}, x_i, \cdots, p_m)$ ou seja a função de uma única variável (recorde Cálculo I) obtida fixando todas as variáveis de f com exceção da variável x_i

Ex 1 Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Temos então que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dx_1} h(x_1) \\ &= 2x_1. \end{aligned}$$

onde $h(x_1) = {x_1}^2 + x_2^2$ Em particular $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 2$.

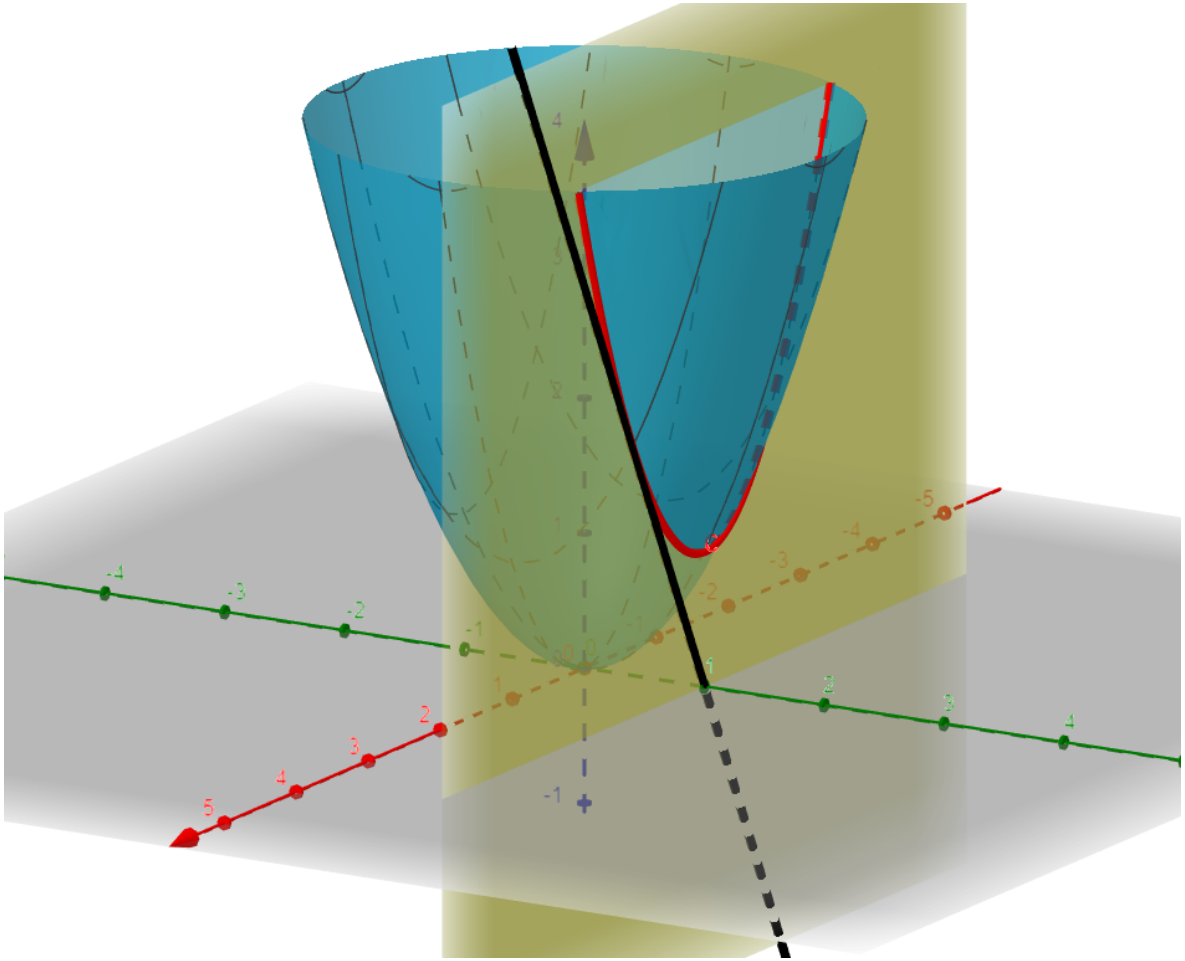

Figura: Ex 1: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 2$ é a inclinação da reta tangente a curva plana $S \cap \{x_2 = 1\} = C = \{(x_1, 1, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2\}$ no ponto $(1, 1, 2)$.

Prob Considere a função de produção de Cobb-Douglas $Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$ Calcule $\frac{\partial F}{\partial K}$

Prob Calcule $\frac{\partial}{\partial x_1}\sin(x_1 x_2)$.

Prob Seja $f(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{3}{2}}\exp(\sin(x_1^2 x_2))$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0)$.

Várias derivadas parciais

Def: Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é continua para qualquer i.

Def: Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^k se $\frac{\partial^n f}{\partial^{i_1} x_1 \cdots \partial^{i_m} x_m}$ para $n \leq k$ e $i_1 + \cdots i_m = n$.

Prop: Composta, soma,diferença, multiplicação e divisão (onde fizer sentido) de funções C^k ou suaves são funções C^k ou suaves.

Prop Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Ex 2: $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1 x_2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 x_2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 x_2)$

Aplicação derivada

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $p \in U$ se: existem

- uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$;
- uma função $R : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}$

que atendem para $\forall x \in B_\epsilon(p)$:

$$f(x) = f(p) + A(x-p) + R(x-p)$$

$$\lim_{x \to p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|} = 0$$

A aplicação linear A que atende a eq. acima é única, é chamada **derivada no ponto** p e denotada por $df(p) = A$;

Prop Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $p \in U$. Então

$$df(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)\right]$$

Prova: Vamos considerar o **caso** $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(p_1 + t, p_2) &= f(p) + df(p)\Big((p_1 + t, p_2) - (p_1, p_2)\Big) + R(x - p) \\ &= f(p) + df(p)(t, 0) + R(x - p) \\ &= f(p) + t\, df(p)(1, 0) + R(x - p) \end{aligned}$$

$\frac{f(p_1+t,p_2)-f(p)}{t} = df(p)(1,0) + \frac{R(x-p)}{t}$, tomando $t \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = df(p)(1, 0) \text{ Q.E.D.}$$

Teo Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são contínuas então f é diferenciável.

Plano tangente

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} + R(x-p) \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Big(x_1 - p_1\Big) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big(x_2 - p_2\Big) + R(x-p) \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{x \to p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|} = 0$$

Assim sendo, o **plano tangente** em $q = (p_1, p_2, f(p))$ definido como:
$x_3 = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Big(x_1 - p_1\Big) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big(x_2 - p_2\Big)$ aproxima o gráfico $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = f(x_1, x_2)\}$ perto do ponto $q = (p_1, p_2, f(p))$

Visto que o **plano tangente** é definido como

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Big(x_1 - p_1\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big(x_2 - p_2\Big) + (x_3 - f(p)) = 0$$

um vetor **normal** ao plano tangente (e assim normal ao gráfico S) é

$$N = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1)$$

Prob: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $q = (1, 1, 2)$.

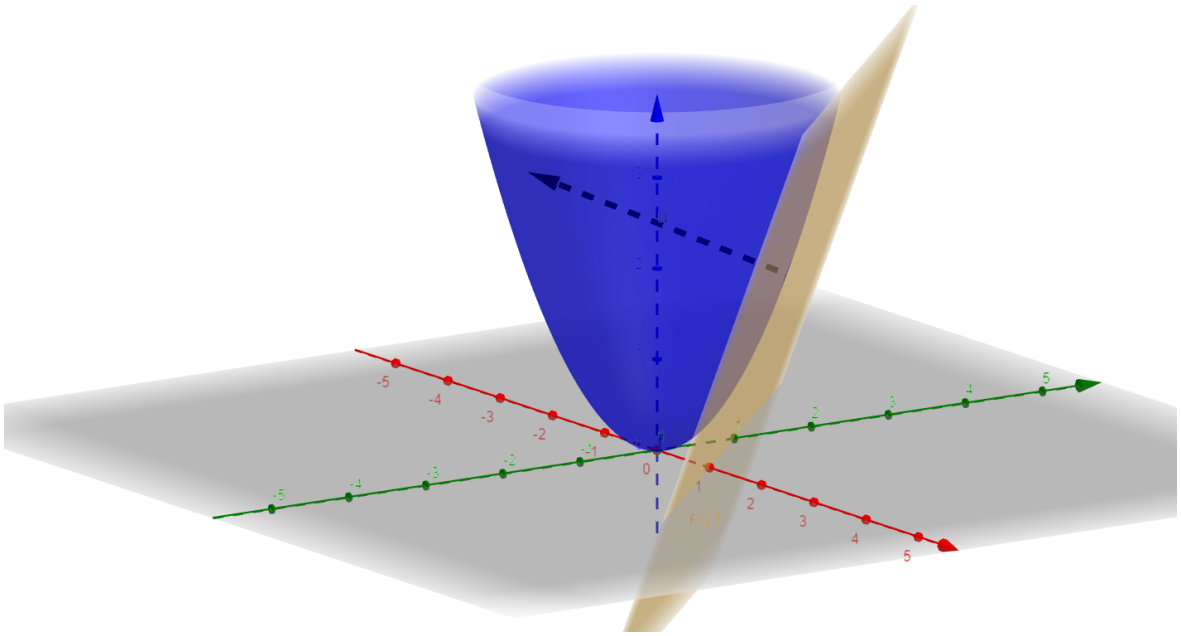

Figura: plano tangente $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$ ao gráfico de $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^2$ no ponto $q = (1, 1, 2)$. Em destaque também vetor normal $N = (-2, -2, 1)$

Derivada de aplicações

Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in U$ se: existem

- uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;
- uma função $R : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}$

que atendem para $\forall x \in B_\epsilon(p)$:

$$F(x) = F(p) + A(x - p) + R(x - p)$$

$$\lim_{x \to p} \frac{R(x - p)}{\|x - p\|} = 0$$

A aplicação linear A que atende a eq. acima é única, é chamada **derivada no ponto** p e denotada por $DF(p) = A$;

Prop Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável em $p \in U$ com $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. Então

$$DF(p) = \begin{bmatrix} df_1(p) \\ \vdots \\ df_n(p) \end{bmatrix}$$

onde $df_i(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é $df_i(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$ ou seja

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$$

Teo Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Se $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ são contínuas então F é diferenciável.

Ex 3 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $F(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

(a) Calcule $DF(r, \theta)$.

(b) Esboce a imagem $F([\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{3}])$ destacando as curvas$r \to F(r, \theta_0)$ e $\theta \to F(r_0, \theta)$.

$$DF(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

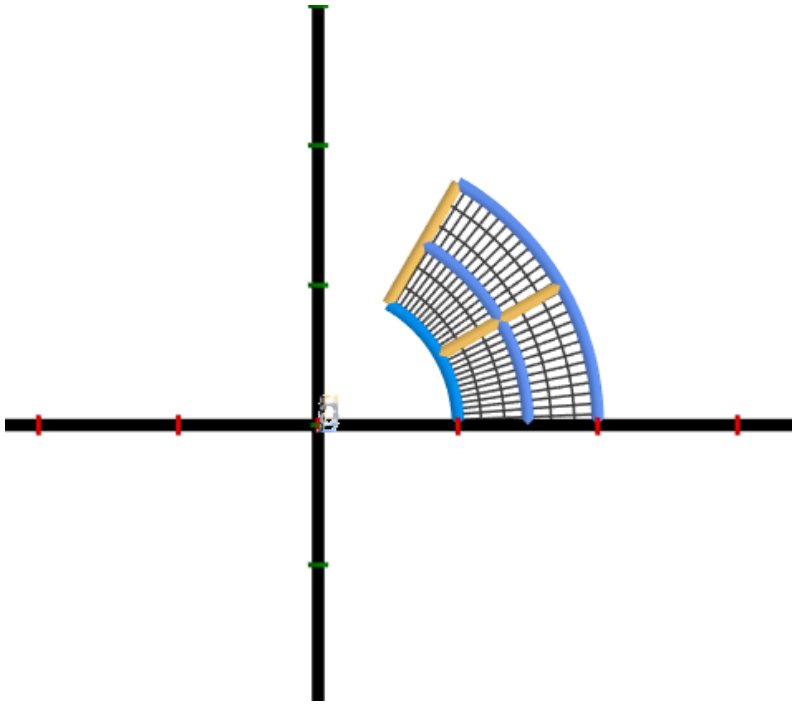

Figura: Ex 3

Prob: Seja

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 = 1\}$$

1. Baseado no Resumo 4, determine se S é gráfico, superfície de revolução ou cilindro sobre curva plana.
2. Esboce S.
3. Determine uma parametrização $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (vide Resumo 4) e determine $D\psi$.
4. Determine $N = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$ e o plano com vetor normal N e contendo $\psi(p)$ ou seja o plano tangente a S no ponto $\psi(p)$.